

Elementary Treatise

ON

MECHANICS

VOL. I. *STATICS.*

यंत्रशास्त्र
पूर्वार्ध.
यंत्रस्थितिशास्त्र

हायथ

बाळाजी प्रभाकर मोडक
कोल्हापूर येथील राजाराम कॉलेजांतील
पदार्थविज्ञानशास्त्राचे गुरु

आणि

राजकुमारांचे सुपरिटेण्डंट
यांनी

अनेक इंग्रजीग्रंथांच्या आधारे
ट्रेनिंगकालेजांत व दुसऱ्या मोठ्या विद्यालयांत
मराठीभाषेच्या द्वारे शिक्षणाच्या विद्यार्थी-
च्या उपयोगाकरिता रचिला.

जून सन १८८७ इ.स.वी.

सर्व हक्क ग्रंथकर्त्यांनी ठेविले आहेत.

किंमत २ रुपये.

155B7

8715.

कोल्हापूर येथें
विद्याविलास छापरवान्यांत छापिला.

B4

A3

प्रस्तावना.

सृष्टिशास्त्र व रसायनशास्त्र यांतील यंत्रांचे वर्णन करितांनां यंत्रशास्त्रांतील माहितीच्या शब्दांचा व सिद्ध झालेल्या गोष्टींचा वारंवार उपयोग करावा लागूं लागला व याविषयीं हवाला देण्यास यंत्रशास्त्रांतील सर्वसिद्धांत यथाशास्त्र दिलेले पुस्तक नसल्यामुळे अडचण पडूं लागली, तेव्हां यंत्रशास्त्रावर एक पुस्तक लिहावे असें मनांत आले, व त्यांत यंत्रशास्त्राचे मूळभूतसिद्धांत लिहिण्याचा विचार प्रथमकेला व तोच कित्येक मित्रांनीं परमंत केलापरंतु असें केल्यानें मराठी भाषेंत जी खरी उणीव ती पुरी होणार नाही असें मला वाटले. कारण यंत्रशास्त्राविषयीं साधारण माहिती हरी केशवजीच्या पदार्थविज्ञानांत, कैरोपंती पदार्थविज्ञानांत आणि फडकेकृत यंत्रशास्त्राचीं मूळे यांत दिलेली आहे; परंतु त्यांतील माहिती केवळ तांत्रिक असून यंत्रशास्त्रांतील भ्रामकत्व, मेरणायुग्म, पर्षण, मेरणासमांतर शुज-चौकोन, समांतर मेरणांचीं कार्ये, समांतर मेरणांचा मध्य, गुरुत्वमध्य इत्यादि अनेक महत्त्वाच्या उपयुक्त विषयांचें विशेष विवेचन नसून केवळ दिग्दर्शन केले आहे. इतके नव्हे तर कोणत्याच विषयाचे यथाशास्त्र गणितरीत्या विवेचन केलेले नाही. या करितां सदर ममाणें पुस्तक लिहिल्यानें, मराठी भाषेंतील शास्त्रीय विषयांवरील ग्रंथांत मोठीही भर पडणार नाही असें निश्चिंतपणें वाटून जर यंत्रशास्त्रावर ग्रंथ लिहिणे तर निदान युनिव्हर्सिटीतील बी. ए. च्या परीक्षेच्या उमेदवारांस जितकें ज्ञान असावे लागेल, तिच्या माहितीचा समावेश होण्याजोगें तरी असले पुस्तक असावे असें वाटले. राजाराम कालेजांन फर्स्ट बि. ए. क्लास सन १८८३ सालीं सरळ झाल्यापासून त्या क्लासास यंत्रस्थितिशास्त्र शिकविण्याचे काम मजकडेच असल्यानें स्वाभाविकच या विषयावरील अनेक

ठी भाषेच्या द्वारे अद्ययन करण्यांत घालवितील त्यांस मोठ्या विद्या-
 लयांत जाण्याच्या प्रवेशपरीक्षे इतका अभ्यास करण्याचा मात्र
 मार्ग आहे. एवढ्याच काळांत वि. गे. च्या परीक्षे इतका अभ्यास हो-
 ण्यास कांहीं हरकत दिसत नाही. कदाचित लागले तर एक वर्ष जा-
 स्त लागेल. गणित, इतिहास, पदार्थविज्ञान व रसायनशास्त्र, तर्कशा-
 स्त्र, नीतिशास्त्र राजनीतीवगैरे गहन विषय स्वभाषेच्या द्वारे शिक-
 ण्यास अगदीं मार्ग नाही, उंचप्रतीचे शिक्षण कायतें इंग्रजी भाषेच्या
 द्वारे मिळतें. इंग्रजी भाषा शिकण्यास काळ व स्वर्च फार लागतो.
 याची अनुकूलता थोड्यांस असते. इंग्रजी भाषा शिकण्याची स्थ-
 लें हायस्कूलें होय. हीं विद्यालये फक्त जिल्ह्यांच्या ठिकाणीं आ-
 हेत. यांतही हल्लीं फी इतकी वाढली आहे की, ती मध्यम-स्थितींतल्या
 लोकांस रुद्धां झेपत नाही. शिवाय यांत अगदीं साधारण शिक्षण मि-
 ळतें. हायस्कूलांत शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांची तरी संख्या केवढी आहे?
 या इलाख्यांतील सर्व हायस्कूलांत मिळून ११८५६. हून जास्त वि-
 यार्थी नाहीत. कोल्हापूर इलाख्याचेंच एक उदाहरण घेऊं. या इलाख्यां-
 त ब्रिटिश इलाख्यांतील कोणत्याही जिल्हापेक्षां विद्येचा मत्सर कमी झाले-
 लेला नाही या इलाख्यांतील ८००००० मजैपैकीं हायस्कूलांत शिकणा-
 री संख्या ५०० आहे. म्हणजे सरासरी १५।१६.०० संख्येस एक पडला.
 १५०० पैकीं आणखी निदान १००।१५० तरी हायस्कूलचें शिक्षण कमी



ता आहे. योरोप रसतयनशास्त्रात यंत्रशास्त्राचे अर्थाने यंत्रशास्त्रावर संपूर्ण ग्रंथ लिहिण्याचे योजिले आहे. याचे एकंदर तीन भाग होतील. (१) स्थितिशास्त्र, (२) गतिशास्त्र आणि (३) विणण्याची, छापण्याची, उसे मारण्याची, दळण्याची, कापण्याची, भोके पाडण्याची रंधण्याची वगैरे हाताने व बोफेने चालणारी यंत्रे व तसेच लहान थोर घड्याळे यांविषयीं बर्णन. यांपैकीं पहिला भाग स्थितिशास्त्र हल्लीं मासिद्ध केला आहे.

यंत्रस्थितिशास्त्राचे यथाशास्त्र गणितरीत्या विवेचन करण्यास त्रिकोणमितीचा आधार लागतो. वर्गसमीकरणे, गणित श्रेढी, भूमितिश्रेढी, कुट्टक इत्यादि बीजगणितांतील विषयसूद्धां आतां कर्तव्य शिकवीत नाहीत. भरीव भूमिति, शंकुछिन्न, आणि त्रिकोणमिति यांचा वाससूद्धां शंकडा एका मास्तरास नसतो. मराठी शाळांत अंकगणितापर्यंत कायतें गणित शिकवितात मराठी भाषेच्या द्वारेणें गहनविषय शिकविण्याचीं जीं विद्यालये त्रेनिंगकालेजें त्यांमध्येसूद्धां वर्गसमीकरणाच्या पलीकडे शिकवीत नाहीत. यंत्रशास्त्रांतील केवळ यांत्रिक शक्तीविषयीं थोडीशी माहिती सांगतात. यासुद्धां कित्येक म्हणूं लागले कीं, असल्या गहनविषयावर पुस्तक लिहिल्यास त्याकडे पाहतो कोण? असले गहनपुस्तक वाचतो कोण, व याचा उपयोग कोण करणार? साह्या विद्युत आणि चुंबन या विषयावरील पुस्तकावर टीका करितांना एका मासिद्ध मराठी वर्तमानपत्रांतही मला या-

B4

A3

(३)

च प्रकारें दोष देण्यांत आला. हल्लीं मराठी भाषेच्या द्वारे शिक्षण देण्याची जी पद्धत आहे तिचें मान पाहतां हें खरें आहे.

मराठी शाळांत फक्त सहा इयत्तां पर्यंत शिकवितात. त्यांतील विषय म्हणजे साधारण इंग्रजी चवथ्या इयत्तेपेक्षां कमी किंवा तितके आहेत. मास्तर नयार करण्याकरितां जीं तीन ट्रेनिंगकालेजें आहेत त्यांतही साधारण म्याट्रिक्युलेशन परीक्षे इतकें शिकवितात. म्हणजे कोणी आपला सर्व अध्ययन करण्याचा काळ मराठी भाषेच्या द्वारे अध्ययन करण्यांत घालवितो तो त्यांस मोठ्या विद्यालयांत जाण्याच्या प्रवेशपरीक्षे इतका अभ्यास करण्याचा मात्र मार्ग आहे. एवढ्याच काळांत वि. गे. च्या परीक्षे इतका अभ्यास होण्यास कांहीं हरकत दिसत नाही. कदाचित लागले तर एक वर्ष जास्त लागेल. गणित, इतिहास, पदार्थविज्ञान व रसायनशास्त्र, तर्कशास्त्र, नीतिशास्त्र राजनीतीवगैरे गहन विषय स्वभाषेच्या द्वारे शिकण्यास अगदीं मार्ग नाही, उंचप्रतीचे शिक्षण कायतें इंग्रजी भाषेच्या द्वारे मिळतें. इंग्रजी भाषा शिकण्यास काळ व खर्च फार लागतो. याची अनुकूलता थोड्यांस असते. इंग्रजी भाषा शिकण्याची स्थळे हायस्कूलें होय. हीं विद्यालये फक्त जिल्हांच्या ठिकाणीं आहेत. यांतही हल्लीं फी इतकी वाढली आहे कीं ती मध्यम-स्थितींतल्या लोकांस रुद्धां झंपत नाही. शिवाय यांत अगदीं साधारण शिक्षण मिळतें. हायस्कूलांत शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांची तरी संख्या केवढी आहे? या इल्लारव्यांतील सर्व हायस्कूलांत मिळून ११८७६ हून जास्त विद्यार्थी नाहीत. कौल्हापूर इल्लारव्याचेंच एक उदाहरण घेऊं. या इल्लारव्यांत ब्रिटिश इल्लारव्यांतील कोणत्याही जिल्हापेक्षां विद्येचा मत्सर कमी झालेला नाही या इल्लारव्यांतील ८००००० मजेपैकीं हायस्कूलांत शिकणारी संख्या ५०० आहे. म्हणजे सरासरी १५।१६०० संख्येस एक पडला. १५०० पैकीं आणखी निदान १००।१५० तरी हायस्कूलचें शिक्षण कमी

ठ ठिकाणी आहेत. या सर्वाने मिळून १५०० हून जास्त विद्यार्थी
 शिक्षित असतील असे वाटत नाही व यांपैकी ३००१५०० हून जा-
 स्त असामीची मजल बि.ए.पर्यंत पोचत नसेल. या इलाख्यांती-
 ल दोन तीन कोट मजेपैकी १५०० स मात्र उंच मतीचे शिक्षण मि-
 लवें, ही गोष्ट किती शोचनीय आहे याचा विचार वाचकांनीच क-
 रावा!! अशी स्थिति असतां मार जिकडून तिकडे विद्येचा मसार
 फार झाला! फार झाला! अशी मात्र ओरड चालते. आज ह्या-
 त असलेल्या सर्व बि.ए.ची संख्या घेतली तर ठारबास १५ पड-
 ण्याची सुकिल पडेल. ही गोष्ट खरोखर मोठी शोचनीय आहे
 केवळ अगदीं खालच्या मतीचे शिक्षण मिळण्याच्या माध सोयी
 झाल्या आहेत. खरी विद्या किंवा उंच मतीचे शिक्षण मिळण्याच्या
 सोयी मोठ्या समाजाच्या उपयोगी पडण्याजोग्या फारच कमी आ-
 हेत, यांत संशय नाही.

इंग्रजी भाषेचा इतका फैलाव झाला आहे व ती भाषा शिक-
 ण्याच्या इतक्या सोयी दादल्या आहेत, तरी मध्यमस्थितीच्या बहु-
 तेक लोकांत व हलक्या वर्गाच्या सर्व लोकांत इंग्रजी भाषेची अद्या-
 प व्याप्ति झाली नाही व पुढे ही होण्याचा संभव नाही. सर्घ तालुक्यां
 च्या ठिकाणी, व इतर मोठ्या गांवीं इंग्रजी हायस्कूलें स्थापन हो-
 ण्याचा संभव नाही यास्तव तेथच्या लोकांस उंच मतीचे शिक्षण मि-
 ळ्या सोयी त्या त्या ठिकाणीच झाल्या पाहिजेत. शास्त्रीय व

B4

12

(५)

इतर गहनविषयांचें ज्ञान स्वभाषेच्या द्वारेच झालें पाहिजे व अशाज्ञानाची जास्त व्याप्ति होण्यास तर दुसरा मार्गच नाही. वस्तुतः कौणतेंही शास्त्रीयज्ञान किंवा गहनविषयाचें ज्ञान कौणत्याही देशांत किंवा लोकांत स्वभाषेच्याद्वारे दिलें नाहीं तर तें तेथें विस्तार पावत नाहीं, लोक ग्राह्य होत नाहीं आणि त्यावर विचार करणारे व ग्रंथलिहिणारे अनेक लोक निपजत नाहींत असें सर्व मान्य लोकांचें मत आहे. परभाषेच्या द्वारे कार्य भाग होण्यास जर १०० वर्षे लागतील, तर तोच कार्य भाग स्वभाषेच्या द्वारे २०।२५ वर्षांतच होईल.

आलीकडे स्वभाषा युनिव्हर्सिटीच्या परीक्षांत ठेवण्याविषयीं थोडीशी चळवळ चालली आहे, परंतु येणेंकरून मुख्य कार्य भाग साध्य होणार नाही व विद्यारवात्याचा आणि युनिव्हर्सिटीचा सर्व लोकांत विद्येचा मसार व्हावा हा जो मुख्य उद्देश तो कधींही अज्ञानें तडीस जाणार नाही. हायस्कूलच्या इतकें स्वभाषेच्या द्वारे शिक्षण देण्याजोग्या शाळा तालुक्याच्या ठिकाणी व मोठ मोठ्या शहरच्या व गांवच्या ठिकाणी असल्या पाहिजेत. आणि बऱ्याच जिल्हांच्या ठिकाणी बी. ए. इतकें शिक्षण देणारीं कालेजे असलीं पाहिजेत. असें केल्यानें इंग्रजी शिकल्याशिवाय उच्चमतीचें शिक्षण मिळतच नाही; ही अडचण दूर होईल. परंतु असें होण्यास बरीच अवधिलाने गेल. यास्तव आरंभीं युनिव्हर्सिटीनें हल्लीं पुणे, अमदाबाद, पारधाड आणि कराची येथील चार ट्रेनिंगकालेजांस बी. ए. पर्यंत सर्व स्वभाषेच्या द्वारे शिकविण्याचा अधिकार देऊन त्या कालेजांतील विद्यार्थ्यांस युनिव्हर्सिटीच्या सर्व परीक्षांस घ्यावें आणि स्वभाषेत जे परीक्षा पास होतात त्यांस पदव्या द्याव्या. मराठी सहाव्या इयत्तेचे अभ्यास स्याद्रिक्युलेशन परीक्षे इतके ठेवून या परीक्षेंत जे पास होतात त्यांस ट्रेनिंगकालेजांत हल्लीं ममाणें घ्यावें. पी. ड., पहिली बी. ए. व दुसरी बी. ए. या परीक्षांचे सर्व अभ्यास हल्लीं इंग्रजींत आहेत तेच ठेवावे. ज्यांस इं

घांमध्ये हल्लीं जें जमीन अस्मानचें अंतर असतें तें रहाणार नाहीं, ट्रेनिंग कालेजांत हल्लीं फक्त मास्तर तयार करितात. तसा उद्देशान ठेवितां मास्तर ह्योण्याकरितांच जे येतील त्यांस मात्र शिक्षणपद्धति शिकविण्याची तेवढी वेगळी सोय. असली म्हणजे बस्स होईल. किंवा हल्लीं इंग्रजी मास्तरांकरितां परीक्षा घेतात तशी घेतली तरी चालेल. हल्लीं या ट्रेनिंगकालेजांत असलेले शिक्षक स्वभाषेच्या द्वारे बी. ए.च्या परीक्षेचे गहनविषय शिकविण्याजोगे आहेत व जेथें नसतील तेथें नवीन नेमण्यास हवे तितके इंग्रजी शिकून तयार झालेले मिळतील. सन १८५९ सालीं युनिव्हर्सिटी स्थापन झाली त्यावेळीं अशी स्थिति नव्हती. यास्तव या गोष्टीचा युनिव्हर्सिटीनें अवश्य विचार करावा. आणि हिंदुस्थानांतलें युनिव्हर्सिटी हिंदुस्थानच्या भाषांच्या द्वारे शिक्षणास मुळींच उत्तेजन देत नाहीं हा जो आरोप आहे. तो दूर करावा. अशी माझी सूचना आहे. स्वभाषेंत सर्व विषयांवर पुस्तकें कोठें आहेत अशी मोठी शंका निघेल या करितां तिचेही निरसन केले पाहिजे.

प्रवेशपरीक्षेस लागणाऱ्या विषयांवर मराठीत पुस्तकें आहेत हे सर्व कबूल करितील. आतां फक्त इंग्लंडच्या इतिहासावर चांगली पुस्तकें नाहीत. परंतु हा विषय मराठी म्याट्रिब्युलेशन परीक्षेंत म्हणजे हल्लींच्या मुलकी परीक्षेंत घातल्याबरोबर अनेक पुस्तकें लावून म-

B4

A3

सिद्ध होतील. वरील तिन्ही परीक्षांस संस्कृत भाषा इंग्रजी परीक्षां प्रमाणेंच ठेवावी. पी. इ. आणि पहिली बी. ए. या परीक्षांस लागणारे सुरव्य विषय बीजगणित, सिद्धांत, त्रिकोणमिति, यंत्रस्थितिशास्त्र, पदार्थविज्ञानशास्त्र, प्राचीन इतिहास आणि तर्कशास्त्र हे होत. चांपेकीं पहिल्या पांच विषयांवर निदान मराठी भाषेंत पुस्तकें आहेत बाकी दोन विषयांवर असावीं नशीं पुस्तकें नाहीत परंतु हे छोटे विषय असून मराठीतून हे विषय शिकविणारे हें मसिद्ध होतांच यावर पुस्तकें छापून मसिद्ध होतील. हल्लीं अशा पुस्तकांस मुळींच गिन्हाईक नाहीं म्हणून असलीं पुस्तकें लिहिण्याचा कोणी उद्योग करित नाहीं. बी. ए. च्या दुसऱ्या परीक्षेस भाषांशिवाय इतिहास, अर्थशास्त्र, तर्कशास्त्र, नीतीशास्त्र, गणितशास्त्र आणि सृष्टिशास्त्र हे चार विषय आहेत. चांपेकीं शेवटच्या दोहोंवर वरींच पुस्तकें आहेत. व होत आहेत. पहिल्या दोहोंवर स्वभाषेच्या द्वारे हें विषय शिकविणारे हें मसिद्ध होतांच पुस्तकें निघतील.

असो; या रीतीनें मात्र मोठमोठ्या गहन व पोक्त विषयांवर स्वभाषांत ग्रंथ होतील, स्वभाषेंत शिक्षण देणारे शिक्षक चांगले तयार होतील. खरी विद्या किंवा उंच प्रतीचे शिक्षण संपादन करून घेण्यास अधिक सोंपें होऊन अनेक ठिकाणीं तें क्रमाक्रमानें मिळूं लागेल. केवळ स्वभाषा जाणणारांस कित्येक उपयुक्त विषयांचा गंधही नसतो. ती स्थिति रहाणार नाही. जे इंग्रजी शिकले नाहीत, ते अगदीं तुळबत असें समजले जाणार नाही, स्वभाषेची मोंढी वाढेल, वर्तमानपत्रें चालविणारे चांगले निपजतील. मोठमोठ्या विषयांवर विचार करणारांची संख्या वाढेल. इत्यादि असंख्य फायदे होतील.

या स्थळीं हे विचार देण्यांत माझे दोन उद्देश आहेत. एक तर हा कीं या विषयाकडे लोकांचीं मनें लागून विद्वान् लोकांनीं या विषयाचा विचार करावा. वर्तमानपत्रांत याची चर्चा व्हावी, आणि युनि-

विषयाची वेळ लवकरच येईल व आलीच पाहिजे. त्यावेळी निदान
 सृष्टिशास्त्र, रसायनशास्त्र आणि यंत्रशास्त्र या विषयांवरील पुस्त-
 कांची उणीव वाटून ये. या बुद्धीने ही अल्पसेवा स्वभाषेची करित
 आहेत ती लोकांस मान्य होऊन हे पुस्तक लोकांच्यापास पात्र होईल.
 अशी आशा आहे.

यांत जरी यंत्रस्थितिशास्त्राचें विवेचन बरेच पूर्णपणे गणित-
 रीत्या करणेंच यत्न केला आहे; तरी ज्यांस केवळ या शास्त्रांतील मू-
 लभूत सिद्धांतांचें आणि साध्या यंत्रांचें किंवा यांत्रिकशास्त्रांचें ज्ञा-
 न करून घेणें आहे त्यांसही हे पुस्तक उपयोगी पड्या असा हे-
 तु सर्व प्रकरणें लिहितांना ठेविलेला आहे. बहुतेक सिद्धता, उपप-
 न्नि आणि सारण्या त्रिकोणमितीशिवाय सांगयतील तितक्या सां-
 गून शिवाय त्रिकोणमितीच्या आधारे सांगितल्या आहेत. तशींच
 उदाहरणेंही देतांना त्रिकोणमितीशिवाय स्फटणारी व त्रिकोणमि-
 तीने स्फटणारी अशीं दिलीं आहेत. गणितरीत्या विवेचन केलेला
 असा या विषयावरील हा पहिलाच ग्रंथ असल्यामुळे शब्द योज-
 नेत, पारिभाषिक शब्दांत, अक्षर योजनेत वगैरे रद्दावी तशी सर्ब-
 त्त एक पद्धति राहिली नसेल; तथापि तसें करण्यास होईल तितका य-
 त्न केला आहे. कित्येक विषयांचें पूर्ण विवेचन प्रथमतःच यास्थळीं के-
 लें असल्यानें कोहीं अगदीं नवे असे पारिभाषिकशब्द योजिले आ-
 हेत. जसे, आसकत्व, जुळें अथवा युग्म, घर्षणगुणक, मैरणासंच-

रत्न इत्यादि. अल्पे शब्द कोणत्या इंग्रजी शब्दांस घोडिल्ले आहून, हें एकदम समजावें च त्यांत सुधारणा करण्यार एकदम सुचवितां यावं, याकरितां बहुतेक पारिभाषिकशब्दांचा शेवटीं कांशा दिव्ता आहें. खिल्ले छापानें छापवून आकृति शेवटीं देण्यापेक्षां, आकृति जेथच्या तेथें देतां येण्याकरितां सुंदर शिल्लाल्हापानें पुस्तक छापिल्लें आहें च अनुक्रमणिका कळयचार दिव्तीं आहें. अशुद्धें च रहावीं या करितां जरी बराच यत्न केला, तरी बरींच अशुद्धें राहिल्लीं व अशुद्धिपत्र वरेंच मोठें झाल्लें आहें. अशा मोठ्या यत्नान विषयावरील विवेचनान्त दोष राहण्याचा संभव आहें. चास्तवजे दोष कोणाच्या नजरेस येतील, ते त्यांनीं सत्ता कळविण्याची सद्द्वेषानी करावी; अशा माझी त्यांस मार्यना आहें. म्हणजे दुसऱ्या आवृत्तींत ते दोष दुरुस्त करीन. आतां प्रस्तावना बरीच लांब झाली, याबद्दल वाचकांची माफी मागून आणि यास उदार आशय मिळून यंत्रणाच्या चे राहिल्लेले दोन भाग प्रसिद्ध करण्यार उन्हेजम मिळावें, याबद्दल जगन्निघंट्याची मार्यना करून पुरेंकरितां.

राजाराम कालेज यंत्रणाच्या }
 कांल्हापूर ता. २१ जून १८८१ }

बा० प्र० मोडक.

4

A3

अनुक्रमणिका.

यंत्रशास्त्र.

पूर्वार्ध

यंत्रस्थितिशास्त्र.

प्रकरण १

उपोद्घात.

कलम	विषय.	पृष्ठ.
१	यंत्रशास्त्र म्हणजे काय?.....	१
२	मेरणा- समतोल मेरणा.....	११
३	स्थितिशास्त्र व गतिशास्त्र:.....	२
४	दाब, ताण, आकर्षण, वजन, आणि क्षि- तिजपातळी:.....	२ — ३
५	मेरणेचें कार्य.....	३
६	मेरणा दर्शविण्याची रीति.....	५
७	दृढपदार्थ.....	६
८	परिणामीमेरणा, मेरणैकीकरण आणि मे- रणापृथक्करण;.....	६ — ७
९	मेरणाभाषणें;.....	७
१०	यंत्रस्थितिशास्त्रांतील १-३ मत्स्यक्ष ममाणें.	८
११	मत्स्यक्षममाण ४-मेरणेचें संचरत्व:.....	८ — १०
१२	मत्स्यक्षममाण ५-दोरीचा ताण सर्वत्र सार रवा असतो:.....	१० — ११
१३	मत्स्यक्षममाण ६-मेरणारोहण.....	११ — १२

१५.	परिणामी किंवा फलित मेरणा, मेरणाची कर-	
	ण व मेरणापुढे व्हरण... ..	१५ — १६
१६.	एका रेषेत कार्य करणाऱ्या मेरणांची परिणा-	
	मी मेरणा काढणे... ..	१६ — १९
१७	भिन्नभिन्न दिशांनी कार्य करणाऱ्या मेरणांची	
	परिणामी मेरणा... ..	१९ — २१
१८	अनेक मेरणा एका स्थळीं कार्य करित असून	
	पदार्थ स्थिर राहिल तर त्यांपैकीं एक मे-	
	रणा बाकीच्यांच्या परिणामी मेरणे बरोब-	
	र व उरूट असेल... ..	२१ — २२
१९	दोन मेरणांची परिणामी मेरणा, मेरणासमां-	
	तरभुज चौकोन... ..	२२
२०	याची सत्यता मयोगानें पाहणे... ..	२२ — २४
२१ — २२	मेरणासमांतरभुज चौकोनाची सिद्धता... ..	२४ — २६
२४	दुसऱ्या रीतीनें सिद्धता... ..	२० — २१
२५	परिणामी मेरणा मोठ्या मेरणेच्या अधिक	
	जबळ असते... ..	२२ — २३
२६	मेरणांमधील कोन मोठा असेल तरी परिणा-	
	मी मेरणा लहान असते... ..	२३

(३)

कलम.	विषय.	पृष्ठ.
२७	त्रिकोणमितीच्या सहाय्याशिवाय सुटणारीं या वरवीं उदाहरणें-----	३३—३७
२८	दोन समानमेरणांची परिणामी मेरणा भूमिती- नें दर्शविणें-----	३७—३८
२९	दोन मेरणांची परिमाणें व त्यांमधील कोन मा- हीत असल्यास परिणामी मेरणेची सारणी काढणें-----	३८—३९
	मकरण दोन यावरील उदाहरणें-----	३९—४२

प्रकरण ३

एका स्थळीं कार्य करणाऱ्या अनेक मेरणा.

३०	मेरणात्रिकोण-----	४३—४४
३१	याचा उलट सिद्धांत-----	४४—४६
३२	यावर उदाहरणें-----	४६—४८
३३	एका स्थळीं कार्य करणाऱ्या ३ मेरणा समतो- ल असतील तर मध्येक दोहोंमधील कोन च्या भुजिज्येशीं समाणांत असेल---	४८—४९
३४	एका पातळींत कार्य करणाऱ्या ३ मेरणांनीं प- दार्थ समतोल राहिल तर त्यांच्या कार्यदृश- क रेखा एका बिंदूंत मिळतील किंवा त्या समांतर असतील-----	४९
३५—३८	एका मेरणेचें दोन मेरणांत पृथक्करण---	४९—५४
३९	दिलेल्या दिशेंत विवक्षित मेरणेचा परिणाम काढणें-----	५४—५५
४०	दोन मेरणांच्या परिणामी मेरणेच्या विवक्षित	

	काढणें	५७	—	५८
४५	मेरेणा बहुकोण	५८	—	५९
४६	त्रिकोणमितीच्या आधारेनें अनेक मेरेणांची परिणामी मेरेणा काढणें	५९	—	६०
४७	अनेक मेरेणा समतेल असण्यास अवश्य गो- ष्टी, सोडविलेलीं उदाहरणें	६०	—	६६
	सोडविण्याकरितां उदाहरणें	६६	—	६९

प्रकरण ४

समांतर मेरेणा.

४८	पदार्थावर अनेक स्थळीं कार्य करणाऱ्या मेरेणा समांतर असतील किंवा नसतील	७०	—	७०
५९	— ५०	दोन समांतरमेरेणांची परिणामी मेरेणा काढणें.	७०	— ७४
५१	— ५२	अनेक समांतरमेरेणांची परिणामी मेरेणाकाढणें.	७४	— ७७
५३	— ५४	दिलेल्या मेरेणांचें दोन समांतर मेरेणांत पृथक्करण करणें	७७	— ७७
५५	समांतर मेरेणांचा मध्य काढणें	७७	—	७९
५६	— ५८	दोन किंवा अधिक मेरेणांच्या कार्यदृशक बिंदूंची दिलेल्यादोन रेखांपासून अंतरें दिलीं असल्यास त्यांपासून त्यांच्या मध्याचीं अं-		

B4

A3

(५)

कलम.

विषय.

पृष्ठ.

तरं काढणे	७१—७३
उदाहरणे	८३—८५

प्रकरण ५

भ्रामकत्व

विवक्षित बिंदू संबंधीं प्रेरणेचें भ्रामकत्व म्हणजे काय ? भ्रामकशक्तीचीं व्य-

वहारांतील उदाहरणे --- ८६—८७

५९ धनभ्रामकत्व आणि ऋणभ्रामकत्व --- ८७—९०

६० भ्रामकत्व भूमितीनें दारवविणे --- ९०—९१

६१—६२ भ्रामकत्व दर्शविण्याच्या दुसऱ्या दोन रीति --- ९१—९२

६३—६४ दोन प्रेरणांच्या दिलेल्या बिंदूसंबंधीं भ्रामकत्वांची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या त्याच बिंदू भोंवतालच्या भ्रामकत्वा बरोबर असते --- ९२—९९

६५ अनेक प्रेरणांच्या भ्रामकत्वाची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या भ्रामकत्वा बरोबर असते --- ९९—१०१

६६ सदरची दुसरी सिद्धता --- १०१—१०२

६७ प्रेरणेचें सरळ रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व --- १०२—१०३

६८ अनेक प्रेरणांच्या सरळ रेषेसंबंधीं भ्रामकत्वांची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या भ्रामकत्वा बरोबर असते; पातळीसंबंधीं प्रेरणेचें भ्रामकत्व --- १०३—१०४

उदाहरणे --- १०४—१०५

७०	मेरणायुग्मास परिणामी मेरणा नसते	१०६—१०७
७१	युग्म, त्याच्या भुजा, त्याचें भ्रामकत्व आणि त्याचा भ्रांस यांच्या व्याख्या, युग्माच्या कार्याने भ्रमण होतें--- --- --- --- ---	१०७—१०८
	युग्माविषयी सिद्धांत १, मेरणायुग्माचें एका बिंदूसंबंधी भ्रामकत्व सर्वदा साररचें असते--- --- --- --- ---	१०८
	सिद्धांत २- युग्माचें त्याच्या भुजेतील बिंदु भोंवती चळण... --- --- ---	१०९—१११
	सिद्धांत ३- युग्माच्या भुजेचें त्याच्या पातळीत तिशी समांतर स्थलांतर... --- --- ---	१११—११२
	सिद्धांत ४- एका युग्माबरोबर तेवढ्याच भ्रामकत्वाचें दुसरें युग्म काढणें--- --- ---	११२—११३
	सिद्धांत ५- एका युग्माच्या जागी तेवढ्याच भ्रामकत्वाचें दुसरें युग्म ठेवणें --- --- ---	११३—११४
	सिद्धांत ६- अनेक युग्मांचें परिणामी युग्म काढणें--- --- --- --- ---	११४—११५
	सिद्धांत ७- एक मेरणा व एक युग्म या बरोबर एक मेरणा काढणें--- --- ---	११५—११६

B4

A3

क्र.सं.	विषय.	पृष्ठ.
	सिद्धांत ८— एका प्रेरणेबरोबर एक युग्मवल्क क प्रेरणा काढणे—	२१७—२१८
७३	या सिद्धांतापासून मिघालेकीं अनुमाने—	”
७४	अनेक प्रेरणा अनेक स्थळीं कार्य करीत असती- ल तर त्या समतोल असतील, त्यांस परिणा- मी प्रेरणा असेल किंवा त्यांच्या बरोबर प- रिणामी युग्म असेल—	११९—१२०
७५	अनेक स्थळीं एका पातळींत कार्य करणाऱ्या प्रेरणांच्या समतोलत्वाच्या आवश्यकगोष्टी.	१२०—१२४
७६	तीन स्थळीं कार्य करणाऱ्या तीन प्रेरणा पदार्था- स समतोल ठेवितील, तर त्यांच्या दिशा एका बिंदूंत मिळतील किंवा समांतर अ- सतील—	१२४—१२५
७७	बहुकोणाकृतीच्या बाजू परिमाणानें व स्थाना- ने प्रेरणा दर्शवितील तर त्यांची परिणामी प्रेरणा युग्म असेल. व त्याचें कोणत्याही बिं- दूसंबंधीं भ्रामकत्व बहुकोणाकृतीच्या क्षे- त्राच्या तुल्य असेल—	१२५—१२७
	सोडबिलेकीं उदाहरणे—	१२७—१२०
	सोडबिण्याकरितां उदाहरणे—	१२०—१२३

प्रकरण ७

गुरुत्वमध्य.

७८	गुरुत्वाकर्षण, वजन किंवा गुरुत्व, विक्रेश, क्षि- तिजपातळी आणि गुरुत्वमध्यांच्या व्याख्या.	१२३ १२४
----	--	---------

- सता सर्व पदार्थांचा गुरुत्वमध्य काढणे... १२७
- ८४ पदार्थांचा आणि त्याच्या एका खंडाचा गुरुत्व-
मध्य दिले असता दुसऱ्या खंडाचा गुरुत्वम-
ध्य काढणे... १२७
- ८५ सरळ रेषेचा गुरुत्वमध्य काढणे... १२८
- ८६ समांतर भुज चौकोनाचा गुरुत्वमध्य काढणे... १२८—१२९
- ८७ त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य काढणे... १२९—१४१
- ८८ त्रिकोणाच्या तीन कोनांवर ठेवलेले तीन सार-
खे पदार्थ यांचा व त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य
एकच असतो... १४१—१४२
- ८९ त्रिकोणाच्या परिमितीचा गुरुत्वमध्य काढणे... १४२
- ९० द्वापिज्यमचा गुरुत्वमध्य काढणे... १४२—१४५
- ९१ त्रिकोणाकार शंकूचा गुरुत्वमध्य काढणे... १४५—१४८
- ९२ त्रिकोणाकार शंकूच्या चारी कोनांवर ठेविलेले
चार सारखे पदार्थ यांचा आणि शंकूचा गु-
रुत्वमध्य एकच असतो... १४८
- ९३ ज्याचा पाया बहुकोणाकृति आहे अशा शं-
कूचा गुरुत्वमध्य काढणे... १४८—१४९
- ९४ ज्याचा पाया वृत्त आहे अशा शंकूचा गु-

B4

A3

(९)

कलम.

विषय.

पृष्ठ.

	रुत्वमध्य काढणें... ..	१४९
१५	पदार्थ एका बिंदूपासून वांगिला व त्याभों- वती फिरता असला तर त्या बिंदूतून जाणारी दिक्कुरेखा गुरुत्वमध्यांतून जा- ते... ..	१४९-१५०
१६	एका बिंदूवर समतोल असलेला पदार्थ हालविला तर त्याचा गुरुत्वमध्य आ- धार बिंदूच्या खाली किंवा वर असे- ल त्या ममाणें तो मूळ जाग्यावर येई- ल किंवा कळंडेल. पदार्थाची स्थिरा- वस्था व अस्थिरावस्था... ..	१५१-१५२
१७	पदार्थाच्या गुरुत्वमध्यांतून जाणारी दि- क्कुरेखा त्याच्या पायांत पडेल तर प- दार्थ उभाराहील आणि बाहेर पडली तर कळंडेल... ..	१५२
	उदाहरणें... ..	१५२-१५४

प्रकरण ८

साधीं यंत्रें किंवा यांत्रिकशक्ति.

यंत्र म्हणजे काय? त्याचा उपयोग, यांत्रि-

क शक्तींचीं नांवें... ..

१८ समतोल यंत्रांविषयीं विचार, शक्तिवक्-

जन... ..

१९ यांत्रिकस्वार्थ म्हणजे काय... ..

१०० उच्चालकाची व्याख्या, त्याचा देकू, त्या-

कलम.	विषय.	पृष्ठ.
	च्या भुजा, सरळ उच्चालक व वांकडाऊ- च्चालक १५६—१५७	
१०१	उच्चालकशक्ति व उच्चाल्य वजन... .. १५७	
१०२	उच्चालकानें यांत्रिकस्वार्थ केव्हां प्राप्त होतो. १५७—१५८	
१०३	उच्चालकाचे तीन वर्ग... .. १५८—१५९	
१०४—१०५	उच्चालकाचीं व्यवहारातील उदाहरणें— तर- फ, कात्री, आडकिल्या, चिमटा, चरक इत्यादि... .. १५९—१६१	
१०६	उच्चालकाचें समतोलत्व राहण्यास शक्ति आ- णि वजन या घेरणांचीं टेंकू भोंवताल- चीं भ्रामकत्वे समान असलीं पाहिजेत. १६१—१६२	
१०७—१०८	उच्चालक समतोल असतो तेव्हां शक्ति आ- णि वजन त्यांच्या कार्यमार्गीवर टेंकूपा- सून काढलेल्या लंबांच्या व्युत्क्रम ममा- णात असतात... .. १६२—१६५	
१०९	उच्चालकाच्या टेंकूवरील दाब काढणें ... १६५	
११०	तराजू १६६—१६७	
१११	चांगल्या तराजूच्या मुख्य गोष्टी— दांडी, सूक्ष्मता व स्थायित्व... .. १६७	
११२	तराजू चांगला होण्यास कोणत्या गोष्टी अ- वश्यक असतात तें काढणें... .. १६७—१७०	
११३	तराजूची सूक्ष्मता त्याच्या स्थायित्वापेक्षां अ- धिक महत्वाची असते याविषयी ... १७०—१७१	
११४	सेवाच्या तराजूनें खरें वजन काढणें... .. १७१	
११५	वजन करण्याच्या दांड्या १७१	

कलम.	विषय.	पृष्ठ.
११६.	वजनकरण्याच्या साध्या दांडीवर वजन सारण्याचे तिचे भाग पाडणे- रोमन तः राजू... .. १७२-१७३	
११७	डेनिश तराजू... .. १७३-१७४	
११८	पत्रें वगैरे वजन करण्याचा तराजू... .. १७५-१७६	
११९	उच्चात्कांची सांगड किंवा संयुक्त उच्चात्क. उदाहरणे... .. १७७-१८३	

प्रकरण ९

चाक व कणा.

(अक्षचक्र.)

१२०	कण्यास खिळलेल्या चाकाचा उपयोग.	१८३-१८५
१२१	कण्यास खिळलेल्या चाकाच्या समता- लत्वाचा नियम प्रेरणांच्या सिद्धांता वरून काढणे... .. १८५-१८६	
	सदर उच्चात्काच्या नियमावरून काढणे.	१८६-१८७
१२२	याची व्यवहारांतील अनेक उदाहरणे-पा- णी काढण्याचा रद्दाट, दगड चढविण्या- चें यंत्र (विंडलस) जहाजांचे नागरच- ढविण्याचें यंत्र (क्यापस्टर) इत्यादि	१८७-१८९
१२३	संयुक्त चाक व कणा याचें वर्णन व उपयोग	१९०-१९१
१२४	याच्या समतालत्वाचा नियम प्रेरणांच्या सिद्धांतावरून काढणे... .. १९१-१९३	
१२५	सदर उच्चात्काच्या नियमावरून काढणे.	१९३-१९३
१२६	अनेक चाके व कणे यांची सांगड... .. १९३-१९५	

(१२)

कलम.	विषय.	पृष्ठ.
१२७	यांच्या समतोलत्वाचा नियम	१९४—१९५
१२८	यांची कलाकौशल्यांतील उदाहरणे, मोठ्या कारखान्यांत एका बाफेच्या यंत्रांत अनेक यंत्रांस कशी गति देतात याविषयीं... ..	१९५—१९७
१२९	चाकानें चाक्रास गति देणे	१९७—१९८
१३०	दांत्ये असलेलीं चाकें— केंद्रक दंतुरचाकें, फिरीददंतुरचाकें, तिस्रकूदंतुरचाकें इत्यादि... ..	१९८—२००
१३१	दंतुरचाकाच्या समतोलत्वाचा नियम काढणे... ..	२००—२०३
	उदाहरणे	२०३—२०६

प्रकरण १०

कप्पी.

१३२	कप्पीचा उपयोग... ..	२०७
१३३	कप्पीचें वर्णन, तिची रवांच, तिचें घर, तिजवरील दोरी इत्यादि... ..	२०७
१३४	चल व अचल कप्प्या व त्यांचे उपयोग. २०७—२०८	
१३५	एका चलकप्पीच्या यंत्रांत दोऱ्यासमांतर असतात तेव्हां तिचा यांत्रिकस्वार्थ किंवा वजन आणि शक्ति यांमधील ममाण काढणे... ..	२०८—२०९
१३६	दोऱ्यासमांतर नसतात तेव्हां वजन आणि शक्ति यांमधील ममाण काढणे... ..	२०९—२१०

(१३)

कलम.	विषय.	पृष्ठ.
१३७	कप्प्यांच्या मुख्य तीन रचना...	२१०—२११
१३८	पहिल्या प्रकारच्या रचनेतील समतोलत्वाचा नियम...	२११—२१३
१३९	दुसऱ्या रचनेतील समतोलत्वाचा नियम; व्हाइ-टचीकप्पी, स्मीटनची कप्पी;...	२१३—२१६
१४०—१४१	तिसऱ्या रचनेतील समतोलत्वाचा नियम...	२१६—२१८
१४२	स्पानिशबार्टन या नावाच्या आणखी दोन रचना...	२१८—२२०
	उदाहरणे...	२२०—२२५

प्रकरण ११

उतरणा आणि पाचर.

१४३	उतरणाचा उपयोग—उतरणाचे वर्णन...	२२५—२२६
१४४	उंची, लांबी, पाया आणि कल—उतरणाचे वरील वजनास तालून धरणाऱ्या प्रेरणा.	२२६—२२७
१४५	जेव्हा शक्ति उतरणाच्या सपाटीशी समांतर दिशेत कार्य करिते तेव्हा शक्ति वा प्रेरणा आणि वजन यांमधील प्रमाण.	२२७—२२८
१४६	उतरणाच्या पायाशी समांतर दिशेत शक्ति कार्य करिते तेव्हा...	२२८—२२९
१४७	१४८ ह्या त्या दिशेत कार्य करिते तेव्हा...	२३०—२३२
१४९	दुसरी उतरणा:...	२३२—२३३
१५०	व्यावहारिक उपयोग...	२३३
	उदाहरणे...	२३३—२३६
१५१	पाचराचे वर्णन...	२३६

१५२	पाचरांच्या समतोलत्वाचा नियम- व्याव- हारीक उपयोग- उदाहरणे... .. २३७-२४०
-----	---

प्रकरण १२

मळसूत्र.

१५३	मळसूत्र उतरणीचा रूपभेद आहे... .. २४१
१५४	मळसूत्र रुळावर अनेक समान उतरणी गुंडाळून झालेले असते- मळसूत्रा- ची धार- मळसूत्राचा कळ, सूत्रांतर इत्यादि... .. २४२-२४३
१५५	मळसूत्राचा उपयोग... .. २४३-२४४
१५६	मळसूत्राच्या समतोलत्वाचा नियम मेरणां- च्या नियमावरून काढणे... .. २४४-२४६
१५७	मळसूत्राच्या समतोलत्वाची सारणी उत- रणीच्या मूलतत्वावरून गणितरीत्या का- ढणे... .. २४६-२५२
१५८	संयुक्त मळसूत्र- त्याचे वर्णन- उपयोग- समतोलत्वाचा साधारण नियम... .. २५२-२५४
१५९	याच्या समतोलत्वाची सारणी गणितरीत्या काढणे... .. २५४-२५५
१६०	अनंत मळसूत्राचे वर्णन... .. २५५-२५६
१६१	याच्या समतोलत्वाची सारणी काढणे... .. २५६-२५७
१६२	मळसूत्राचे व्यावहारिक उपयोग... .. २५७-२५९
	उदाहरणे... .. २५९-२६१

प्रकरण १३ घर्षण.

१६३	घर्षणाचें वर्णन—व्याख्या—घर्षणाचे नि- यम...	२६२—२६५
१६४	घर्षणगुणक...	२६५—२६६
१६५	विसाव्याचा कौन व घर्षणगुणक काढणे...	२६६—२६८
१६६	घर्षण हिशेबांत घेऊन कृत्यं व उदाहरणेसो- द्विषयाविषयी...	२६८—२६९
१६७	घर्षणाचें एक उदाहरण...	२६९—२७२
१६८	घर्षणयुक्त उच्चलक...	२७२—२७६
१६९	घर्षणयुक्त चाक व कणा...	२७६
१७०	घर्षणयुक्त अचलकपी...	२७६
१७१	घर्षणयुक्त चलकपी...	२७६—२७७
१७२—१७३	घर्षणयुक्त उतरण...	२७७—२८१
१७३—१७४	घर्षणयुक्त मळसूत्र...	२८१—२८३
१७५	व्यावहारिक उपयोग...	२८४—२९०
	उदाहरणे...	२९०—२९४

यंत्रस्थितिशास्त्र शिकण्यास व शिकविण्यास लागणाऱ्या यंत्राची यादी.

	पोंड	शि.	फे.
फळ्यावर यंत्रें टांगण्याची फळी...	०	५	०
तीन पारडी...	०	३	०
१६ वजनांचा गंज जस्ती $\frac{1}{8}$ मोंडापासून...	०	७	६

(१६.)

	पै.	शि.	पे.
यंत्रें अडकविण्याचे आंकडे वर्गरे १२...	०	१	०
दोरीचें गुंढें एक ...	०	१	०
३ फूट लांबीचा एक उच्चालक...	०	५	०
चार साध्या कण्या...	०	६	०
तीन स्वांचाच्या कण्यांचा जोड...	०	५	०
व्हाइटच्या कण्यांचा जोड...	०	८	०
१ फूट उंचीची कण्या दांगण्याची चौकट...	०	७	६
उतरण- तिजवरील गाडा व कपी...	०	९	०
पाचर व बिरलेला तुकडा...	०	५	०
चाक व कणा साधा...	०	२	०
संयुक्त चाक व कणा मळसूत्र, दांगण्याच्या बैठकीसकडां }	०	१८	०
	४	१	०

यांत्रिकशास्त्रीचा संच— यांत तीन प्रकारचे उच्चालक, संयुक्त उच्चालक, साधें व संयुक्त चाक, सर्व प्रकारच्या कण्या, क्यापस्टन, मळसूत्र, मळसूत्राची दाबणी, अनंत मळसूत्र, उतरण, पाचर, सर्व बसविण्याची चौकट, शिवाय करतताबुरूज आघात व मत्याघात. दारविण्याच्या गोठ्या. गुरुत्वमध्य दारविण्याचीं यंत्रें, इत्यादि असतात. ५ ५ ०

या दोहोंपैकीं हवातो संच थ्रिफिन आणि कंपनी किंवा न्यूटन आणि कंपनी यांजकडे सदर किमतीस विकत मिळतो ज्यांस पाहिजे त्यांस मी आणवून देईन.

त्रशास्त्र म्हणतात.

(२) प्रेरणा- ज्या कारणाने पदार्थाची गति किंवा स्थिति बदलते त्यास प्रेरणा असें म्हणतात. प्रेरणेनें पदार्थास गति प्राप्त होते किंवा गति असलेला पदार्थ स्थिर होतो, अगर त्याच्या गतींत फेरफार होतो, किंवा हे विकार करण्याचा कळ तिच्या आंगीं असतो

जर पदार्थावर एकाच प्रेरणेचें कार्य घडेल तर तो स्थिर असल्यास त्याचें स्थलांतर होईल, आणि गति विशिष्ट असल्यास त्याच्या गतींत फेरफार होईल; परंतु दोन किंवा अधिक प्रेरणांचे पदार्थावर कार्य घडेल, तेव्हां पदार्थाचें स्थलांतर होईल किंवा जर अनेक प्रेरणांची कार्ये परस्पर नाश पावत असतील, तर पदार्थ स्थिर राहील, किंवा त्याच्या मूळच्या गतींत फेरफार होणार नाहीं. अशावेळीं त्या प्रेरणा समतोल आहेत असें समजावें.

(३) त्रशास्त्राचे दोन विभाग आहेत (१) स्थिति-



(२)

शास्त्र आणि (२) **गतिशास्त्र**. समतोल प्रेरणांच्या परस्पर संबंधांविषयीच्या नियमांचें ज्यांत विवरण केलें असतें त्यास **स्थितिशास्त्र** म्हणतात. आणि ज्या प्रेरणा समतोल नसून स्थिरपदार्थास गति देनात किंवा गतिविशिष्ट पदार्थाच्या गतींत विचार उत्पन्न करितात, त्यांच्या परिणामांविषयीं ज्यांत विवेचन असतें, त्यास **गतिशास्त्र** म्हणतात. स्थितिशास्त्रांत प्रेरणांचें समतोलन होण्यास त्या प्रेरणा विषयीं कोणत्या गोष्टी अवश्य लागतात यांविषयीं सांगितलें असतें; आणि गतिशास्त्रांत गति उत्पन्न होण्यास किंवा मूळच्या गतींत फेरफार होण्यास ज्या गोष्टी लागतात, त्यांविषयीं सांगितलें असतें.

(४) प्रेरणांचीं कार्ये अनेक साधनांनीं घडतात. त्यांपैकीं मुख्यत्वेकरून **दाब**, **ताण** आणि **आकर्षण** या तिहीं विषयींच विचार या शास्त्रांत येईल.

दाब— जर एखादा पदार्थ हातानें किंवा दांड्यानें लोटिला, किंवा एका पदार्थावर दुसऱ्या पदार्थानें दाबिलें किंवा एकावर दुसरा आपटला; अगर पदार्थ टेबलावर ठेविला, किंवा हातांत धरिला म्हणजे टेबलाच्या किंवा हाताच्या प्रतिबंधामुळे तो खाली पडत नाही; यांत दोहोंच्या संलग्न बिंदूंत ज्या प्रेरणेचें कार्य घडतें तीस **दाब** अशी संज्ञा देनात.

ताण— जर एखाद्या पदार्थास दोरीनें किंवा तारेनें किंवा दांड्यानें ओढिलें किंवा तांगिलें, तर दोरीच्या किंवा तारेच्या

(३)

सहाय्यानें जी मेरणा उत्पन्न केली तिला ताण अशी संज्ञा देतात. ज्या जोरांनं म्हणजे मेरणेनें पदार्थ ओढिला असेल किंवा जेवढें वजन टांगिलें असेल तो जोर किंवा तें वजन सहन करण्याचें सामर्थ्य किंवा ताण दोरीच्या आंगीं असावा लागतो.

आकर्षण- जेव्हां दोन पदार्थ परस्पर कांहीं अंतरावर असतां एकाचें दुसऱ्यावर कार्य घडतें त्यास आकर्षण म्हणतात. चुंबकास न लागतां त्या जवळ लोखंडी सुई धरिली तर ती लोंहचुंबकाकडे ओढिली जाते. हातांतून पदार्थ फेंकला, तर तो जमिनीवर पडतो; कारण त्यास पृथ्वी आपल्याकडे ओढिते. तसेंच सर्व ग्रह सूर्याकडे आकर्षिले जातात.

वजन- ज्या जोरांनं पृथ्वी पदार्थास आपल्याकडे ओढिते किंवा आकर्षण करिते त्यास पदार्थाचें गुरुत्व किंवा वजन असें म्हणतात.

पदार्थ पृथ्वीवर सोडिला असतां ज्या दिशेनें पृथ्वीवर पडेल किंवा निजकडे आकर्षिला जाईल त्या दिशेस उंबरेषाअसें म्हणतात. आणि चारेषेचीं काटकोन करणारी जी पातळी तिला क्षितिजपातळी म्हणतात.

(५) **मेरणेचें कार्य-** कोणत्याही विवक्षित मेरणेपासून जें पदार्थावर कार्य घडेल त्याचें बरोबर ज्ञान होण्यास तीनगोष्टी समजाव्या लागतात.

(१) पदार्थावर कोणत्या स्थळीं मेरणेचें कार्य घडव

आहे.

(२) कोणत्या दिशेनें कार्य घडत आहे.

(३) प्रेरणेचें परिमाण, म्हणजे प्रेरणेच्या कार्यापासून केवढा जोराचा परिणाम घडत आहे.

पदार्थावर कोणत्या स्थळीं किंवा कोणत्या बिंदूच्या ठिकाणी प्रेरणेचें कार्य होत आहे हें, भूमितींत ज्या प्रमाणें विवक्षित दिलेल्या दोन रेषांपासून किती अंतरावर दिलेला बिंदु आहे हें समजल्यानें जसें बिंदूचें स्थळ ठरवितां येतें त्याचप्रमाणें प्रेरणेचें कार्य घडण्याचा बिंदु किंवा स्थळ काढतां येईल. भूमितींत जशी सरळ रेषेची दिशा ठरवितात तशी प्रेरणेची दिशा ठरवितां येईल. प्रेरणेचे परिमाण कसे मापावे तें सांगतां.

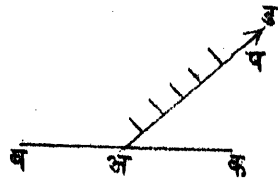
(६) प्रेरणा दर्शविण्याची शीति - मागील कळमांत प्रेरणेचें ज्ञान होण्यास ज्या तीन गोष्टींची आवश्यकता सांगितली, त्यावरून हें सहज लक्षांत येईल कीं प्रेरणा सरळ रेषांनीं दर्शवितां येतील; कारण:-

(१) कोणत्याही बिंदूपासून सरळ रेषा काढितां येते. ज्या स्थळीं किंवा ज्या बिंदूवर प्रेरणेचें कार्य होत असेल तेथून सरळ रेषा काढितां येईल.

(२) सरळ रेषा पाहिले त्या दिशेनें काढितां येते; म्हणजे एकाद्या स्थीर रेषेचीं विवक्षित कोन करणारी रेषा काढितां येते. यास्तव ज्या दिशेनें प्रेरणेचें कार्य घडत अ-

सेल त्या दिशेने सरळ रेषा काढितां चेईल.

(३) मेरणेचे अं मान म्हणजे परिमाण असेल त्या ममा-
णाने रेषेची लांबी घेऊन मेरणेचे परिमाण दर्शवितां चेईल. उ-
दाहरण; जर मेरणा ४ शोरांची असेल आणि जर आपण असे
ठरविलें कीं, अड्डेर किंवा एक पोंड मापाची मेरणा एक इंच
लांब रेषेनें दर्शवावयाची, तर ४ शोरांची मेरणा ८ इंच लांब-
व रेषेनें दर्शवितां चेईल. उदाहरणार्थ समजा कीं, एक ३ शो-
रांची किंवा ६ पोंडांची मेरणा क्षितिजाच्या पातळींत असलेल्या
रुळाच्या मध्यावर क्षितीजाशीं ४५ कोन करणाऱ्या दिशेनें का-
र्य करित आहे. जर ब क रेषा
तो रुळ दर्शविण्यास घेतली त-
र तिचा मध्य अ बिंदु काढावा.
त्या ठिकाणीं अ क शीं ४५ चा
कोन करणारी अ उ रेषा काढावीनंतर दर पोंडास ए-
क इंच याप्रमाणें ६ इंच लांबीची रेषा अ प घेतली म्ह-
णजे ती दिलेली मेरणा दर्शवील. परंतु मेरणा अ बिंदूस-
ली रुळास रवाली दावीत आहे किंवा वर ओढीत आहे हें
एवढ्यावरून समजत नाही. मेरणेचे कार्य कोणत्या रेषेत होत
आहे हें मात्र अ प दर्शविते. परंतु अ पासून प कडे किंवा
प पासून अ कडे हा बोध होत नाही. हा बोध होण्यासाठीं
ज्या विशेष कार्य होतें त्या बाजूस तिराचें टोंक काढून दिशा



(६.)

दर्शविज्ञान यास्तव प्रेरणेची दिशा आणि कार्य दर्शक रेषा यां-
मधील वेद लक्षांत ठेविला पाहिजे.

(७) दृढपदार्थ- द्रव्याचे अनेक अणु अगर कण ए-
कत्र होऊन पदार्थ बनला आहे असें कल्पितें आहे. ज्या पदार्था-
त हे कण परस्पर नियत अंतरावर नित्य असतात त्या पदार्थास
दृढ पदार्थ हें नांव देतात.

दृढ पदार्थ इतका घट्ट असतो कीं, तो कधीं आकुंचन व प्रसर-
ण पावणार नाहीं, व कधीं भंग पावणार नाहीं. असा दृढपदार्थ
सृष्टींत कधींही मिळणार नाहीं. प्रेरणांच्या कार्याने प्रत्येक पदा-
र्थाच्या कणांचें जास्त कमी स्थलांतर होईल. यास्तव हे हिशे-
बांत घेऊन गणित करितोना पदार्थांच्या काल्पनिक दृढतेत फेर
पडला आहे हें काढावें लागेल. परंतु हा विषय यंत्रशास्त्राच्या
अति गहन शाखेंतील असल्याने त्याचा विचार या छोट्या
व सोप्या ग्रंथांत न करितां ज्या पदार्थांवर प्रेरणांची कार्ये हो-
तात ते वरील व्याख्येप्रमाणें दृढ आहेत असें कल्पितें आहे.

(८) परिणामी प्रेरणा- पदार्थांवर अनेक प्रेरणांचें
कार्य होत असतां त्या सर्वां प्रेरणांच्या कार्याच्या बरोबरीचें कार्य
करणारी जी एक प्रेरणा तिला त्यांची परिणामी प्रेरणा असें
सूचकानें, आणि त्या अनेक प्रेरणांस तिचे अवयव असें सू-
चतात. दोन किंवा अधिक प्रेरणांच्या बरोबरीची एक प्रेरणा का-
दणें यास प्रेरणेकीकरण आणि एका प्रेरणेचे पृथक्करण क-

रून तिच्या बरोबरीचें कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणा काढणें या-
स प्रेरणापृथक्करण म्हणतात.

(१) प्रेरणा मापणें— स्थिति शास्त्रांत प्रेरणांच्या का-
र्या पासून पदार्थास गति प्राप्त होत नाही. प्रेरणांचीं कार्ये परस्पर
नाश पावून पदार्थ स्थिर राहातो. यास्तव विवक्षित प्रेरणेपासून
जी पदार्थास गति मिळेल त्यावरून तिला मापितां येणार नाही. वि-
वक्षित प्रेरणा प्रमाणभूत कल्पून त्यावरून प्रेरणा मापिल्या पाहि-
जेत. एक शेर वजन उचलण्याचें ज्या प्रेरणेच्या आंगीं सामर्थ्य अ-
सेल त्या प्रेरणेस १ शेराची प्रेरणा असें म्हणावें. ज्या प्रेरणेनें २
शेरांचें वजन उचलतां येईल तीस दोन शेरांची प्रेरणा असें म्हणा-
वें; आणि क शेर वजन ज्या प्रेरणेनें उचलतां येईल ती क शेरां-
ची प्रेरणा समजावी. पदार्थास जें वजन असतें तें केवळ त्या बरील
पृथ्वीच्या आकर्षणाचें फल आहे. विवक्षित पदार्थाचें वजन एक
शेर आहे, याचा अर्थ इतकाच कीं त्यास पृथ्वी १ शेरांच्या जोरानें
आपल्याकडे ओढीत आहे. या करितां एक शेर वजनाच्या पदार्था-
स पृथ्वीकडे न जाऊं देतां, ज्या प्रेरणेनें पृथ्वीचें आकर्षण ज्या दि-
शेनें घडतें त्याच्या उलट दिशेनें तो वर उचलिला जातो, त्या प्रेरणे-
स एक शेराची म्हणजे पदार्थाच्या वजना इतक्या जोराची प्रेरणा
म्हणावी हें स्वाभावीक आहे. तसेंच जी दोरी एक शेर वजन तोळून
धरूं दाकते तिचा ताण किंवा जोर एक शेराचा आहे असें म्ह-
णतात.

(१०) यंत्रस्थिति शास्त्राचे सिद्धांत सिद्ध करण्यास कांहीं प्रत्यक्ष प्रमाणें सिद्ध वत् ध्यावीं लागतील तीं सांगतां. हीं प्रत्यक्ष प्रमाणें इतकीं सकृद्दृष्टीनेच स्पष्ट व रूग्म आहेत कीं, त्यां विषयीं विशेष चर्चा करण्याची गरज नाही.

प्रत्यक्षप्रमाण १ - जर दोन समान प्रेरणा एका पदार्थावर एकाच सरळ रेषेत परस्पर उलट अशा दिशांनीं कार्य करतील तर तो पदार्थ स्थिर किंवा समतोल राहिल.

प्रत्यक्षप्रमाण २ - जर दोन परस्पर उलट दिशांनीं एकाच सरळ रेषेत कार्य करणाऱ्या प्रेरणा पदार्थास समतोल किंवा स्थिर ठेवतील तर त्या प्रेरणा समान असतील.

प्रत्यक्षप्रमाण ३ - जर पदार्थ स्थिर असेल, तर त्याचे कार्य करणाऱ्या सर्व प्रेरणांच्या बरोबर दोन समान व परस्पर उलट अशा प्रेरणा काढितां येतील व सुळच्या प्रेरणांच्या जागीं या दोन प्रेरणा लाविल्यास पदार्थाच्या स्थिरतेत फेर पडणार नाही.

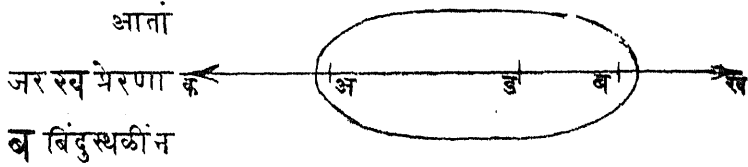
(११) **प्रत्यक्षप्रमाण ४** - प्रेरणेचे संचरत्व - जेव्हां एखादी प्रेरणा समतोल असणाऱ्या पदार्थावर कार्य करित असेल, तेव्हां ती प्रेरणा तिच्या कार्यदृशिक रेषेत पदार्थाशीं दृढतर जोडलेल्या अशा कोणत्याही दुसऱ्या बिंदूस्थळीं लाविली तरी तिच्या कार्यात फेर पडणार नाही.

आपल्या कार्यदृशिक रेषेत प्रेरणेनें एका बिंदूपासून त्या-

(९)

शीं दृढतर जोडलेल्या अशा दुसऱ्या कोणत्याही बिंदुस्थळीं संचार केला तरी परिणाम तेवढाच होतो, म्हणजे प्रेरणा कार्यदर्शक रेषेत कोठेही संचार करू शकते. उदाहरणार्थ—

समजा कीं, क, रच या दोन समान व उलट प्रेरणा अ व ब या सरळ व दृढ रूखावर कार्य करतील, तर रूळ समतोल राहील.



लावितां तिच्या कार्यदर्शक रेषेत दुसऱ्या कोणत्याही रूखाच्या बिंदूत लाविली, तरी ती कशी समान व उलट असल्याने रूखास समतोल ठेवील. सारांश रच प्रेरणा तिच्या कार्यदर्शक रेषेत ब, क, उ किंवा दुसऱ्या कोणत्याही दृढपदार्थाच्या बिंदुस्थळीं लाविली, तरी तिचा परिणाम सारखाच होईल. पदार्थाचे सर्व कण एकमेकांस दृढतर जोडिले असल्याने कोणत्याही ठिकाणी प्रेरणेचे कार्य घडले तरी ते सर्व पदार्थावर होतें हें प्रत्यक्ष प्रमाणबद्ध स्थिति शास्त्रांतील अत्यंत महत्वाचे आहे व त्याच्या सत्यतेवर त्याची सर्व इमारत बांधिलेली आहे. प्रेरणेच्या संचरत्वाचे आणखी एक उदाहरण देतो.

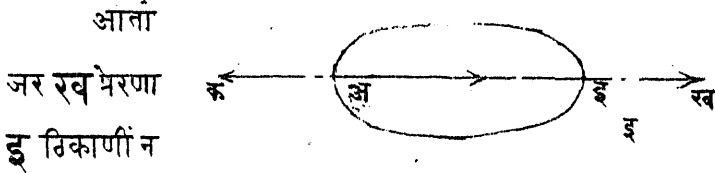
अ ई उ ही सांखळी अ स्थळीं तुळईच्या आंकड्यास रांगिली आहे, व तिच्या दुसऱ्या उ शेवटास व हें वजन रांगिलें आहे. यास्तव आंकड्यावर एकंदर दाब (व न अ उ सां-

रवळीचें वजन) इतका पडेल. आतां जर तु तिकाणाचें वजन काढून इ तिकाणीं लाविलें तर आंकड्यावर दाब (व + अ इ सांरवळीचें वजन) इतका पडेल. यावरून व वजन उ तिकाणीं किंवा इ तिकाणीं लाविलें तरी त्याचा परिणाम सारखाच होतो.



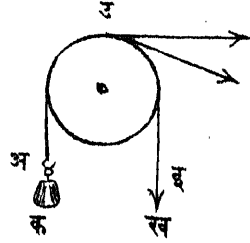
(१२) प्रत्यक्ष प्रमाण ५ - दोरीचा ताण सर्वत्र सारखा असतो - प्रेरणेचें कार्य करण्यास ज्या दोरीचा उपयोग करितात, ती दोरी दृढ आहे असें कल्पितात. म्हणजे ती प्रसरण व आकुंचन पावत नाही, आणि तिच्या कणांतील परस्पर अंतरें सारखीं असतात. प्रेरणेचें कार्य दोरीच्या द्वारेच होतें. प्रेरणेच्या कार्यदर्शक रेषेंत दोरी असते. यास्तव मागील प्रत्यक्ष प्रमाणावरून प्रेरणा दोरीच्या कोणत्याही भागीं लाविली तरी प्रेरणेच्या एका बिंदूपासून दुसऱ्या त्याशीं दृढतर जोडलेल्या बिंदूवर संचार होईल, व तेणें करून तिच्या कार्यांत फेर पडणार नाही. यास्तव दोरीच्या कोणत्याही भागीं प्रेरणा कार्य करील. तरी तितकाच परिणाम होईल. म्हणून दोरीचा ताण सर्वत्र सारखा असतो. आतां एक दोन उदाहरणें देतां.

अ, इ दोरीच्या शेवटास क, रव या दोन उत्कट प्रेरणा ओढीत असल्या आणि दोरी समतोल राहिली तर त्या समान असल्या पाहिजेत.



लावितां जर दुसऱ्या उ ठिकाणी लाविली, तरी दोरी समतोल राहण्यास क प्रेरणा रव बरोबर असलीच पाहिजे. सारांश रव प्रेरणा दोरीच्या कोणत्याही भागीं लाविली तरी समतोल पणास ती क बरोबर असावी लागेल. याजवरून कच्या बरोबरीची, पण उलट अशी रव प्रेरणा दोरीच्या कोणत्याही भागीं लाविली तरी हरकत नाहीं हें उघड आहे.

अ उ इ ही दोरी उ या साफ व गुळगुळीत खुंटीवरून ताणलेली आहे. आतां जर ती समतोल राहिली पाहिजे तर तिच्या दोहों शेवटांस लाविलेल्या क, रव प्रेरणा समान असल्या पाहिजेत. म्हणजे क प्रेरणेस सम तोल धरण्यास खुंटीवरून दोरी गेली आहे तरी खुंटीच्या दुसऱ्या बाजूकडील दोरीस कच्या बरोबरीचीच रव प्रेरणा लागते. मग ती गुळगुळीत खुंटीवरून जाणाऱ्या दोरीस कोठेंही लाविली, म्हणजे दोरीच्या अ क व अ रव भागांमध्ये कोणताही कोन झाला तरी तिचा परिणाम तेवढाच होतो. या प्रमाणें खुंटीच्या जागीं कप्पी असली व तिजवरून दोरी गेली तरी हाच परिणाम होतो



(१३) प्रत्यक्ष प्रमाण ६- प्रेरणारोहण - जर ए-

काद्या दृढ पदार्थावर अनेक प्रेरणा कार्य करीत असतील आणि पदार्थ समतोल असेल तर त्याच पदार्थावर आणखी समतोल अशा प्रेरणांचें कार्य झालें, किंवा मूळच्या प्रेरणांपैकीं कांहीं समतोल प्रेरणा काढून टाकिल्या तरी पदार्थ समतोल राहिल, म्हणजे मूळच्या प्रेरणांच्या परिणामांत फेर बदल होणार नाही. ही गोष्ट इतकी स्पष्ट व उघड आहे कीं, याची चर्चा करण्याची सुक्रीच गरज नाही. समतोल अशा कांहीं प्रेरणांचें आरोहण किंवा अवरोहण झालें तरी त्या परस्पर समतोल असल्यानें पदार्थावर नवीन कार्य घडणार नाही.

(१४) अनुभवावरून आपणास माहित आहे कीं विवक्षित आकाराच्या एका पदार्थाचें वजन तेवढ्याच आकाराच्या दुसऱ्या पदार्थाच्या वजनाबरोबर सर्वदां नसतें. एक घन फूट शिसें, आणि एक घनफूट लोखंड आणि एक घनफूट कापूस यांचें वजन सारखें नसतें. ५ घनफूट शिशाचें वजन ७ घनफूट लोखंडा इतकें असतें आणि एक घनफूट लोखंडाचें वजन कित्येक घनफूट कापसा इतकें असतें. म्हणून शिसें लोखंडाहून जड आणि लोखंड कापसाहून जड असें म्हणतों; किंवा शिशाचें दाढ्य लोखंडाहून जास्त आणि लोखंडाचें कापसाहून जास्त असें समजतों.

जेव्हां पदार्थाच्या कोणत्याही भागाचें वजन त्या भागाच्या आकाराच्या प्रमाणांत असतें, तेव्हां तो पदार्थ सर्वत्र सारख्या दाढ्याचा किंवा समरूप आहे असें म्हणतों. दोन समरूप पदार्थांचीं दाढ्यें त्यांच्या समान आकाराच्या वजना-

च्या प्रमाणांत असतात. यास्तव समरूप किंवा सर्वत्र सार-
ख्या दाढ्यांचा पदार्थ प्रमाणभूत घेऊन त्याचें दाढ्य एक क-
ल्पून त्याशी इतर पदार्थांच्या दाढ्यांची तुलना करितों. दाढ्य
मापण्यास पाणी प्रमाणभूत घेतात, आणि त्याच्या कितीपद
दुसरा पदार्थ हळका किंवा जड आहे हें पाहतात व त्या प-
दीच्या संख्येस त्या पदार्थाचें दाढ्य असें म्हणतात. एक घ-
न इंच तांब्याचें वजन एक घनइंच पाण्याच्या स्रमारे नऊ-
पद असतें, म्हणून तांब्याचें दाढ्य ९ या संख्येनें दर्शवितात.

प्रकरण १६ यावर प्रश्न.

(१) यंत्रशास्त्र, प्रेरणा आणि समतोल प्रेरणा यां-
च्या व्याख्या सांग, आणि स्थितिशास्त्र व गतिशास्त्र यां
मधील भेद दाखीव.

(२) प्रेरणेची दिशा व परिमाण कसें दर्शवितात ?

(३) प्रेरणेची दिशा व प्रेरणा दृशिक रेषा यांमध्ये भे-
द काय ?

(४) प्रेरणा कशा मापितात ते सांग. १० दिशांची प्रेर-
णा असें मोघम सांगितलें असल्यास त्याचा अर्थ काय स-
मजावा ?

(५) प्रेरणेचें संचरत्व आणि प्रेरणारोहण म्हणजे काय ?

(६) दृढ पदार्थ म्हणजे काय ? दोरीचा ताण सर्वभागीं

साररवा असतो हें स्पष्ट कर!

उदाहरणे.

(१) जर १० पोंडांची मेरणा सव्या फूट लांबीच्या रे-
षेनें दर्शवितात तर तीन फूट मऊ इंच लांबीची रेषा किती पों-
डाची मेरणा दर्शवील.

(२) एक इंच लांबीची रेषा ८० पोंडांची मेरणा दर्शवि-
ते तर एक स्वढी जेराची मेरणा दर्शविण्यास किती इंच लां-
बीची रेषा घ्यावी.

(३) कू शेरांची मेरणा अ इंच लांबीची रेषा दर्शवि-
ते, तर डू इंच लांबीची रेषा किती शेरांची मेरणा दर्शवील.

(४) एका दोरीच्या शेवटास ५ शेरांचे वजन टांगिलें आहे
हे व तिच्या मध्यभागी १० शेरांचें टांगिलें आहे तर दोरीच्या दो-
हों भागांचा त्राण काय असेल?

(५) ४ शेर पितळेचा गोळा ५ शेर शिशाच्या गोळ्या
एवढा आहे. तर त्यांच्या दाट्यीमध्ये काय प्रमाण असेल?

(६) एका पदार्थाच्या ५ घन इंचांचें वजन दुसऱ्याच्या ७
घन इंचांच्या वजना बरोबर आहे, तर त्यांच्या दाट्यीतील प्रमा-
ण कांढ?

(७) एका पदार्थाच्या एक घनफुटाचें वजन १ मण आहे,
दुसऱ्या एका पदार्थाचें दाट्यी याच्या ५ पट आहे; तर त्याचा
५ मण वजनाचा तुकडा घेतला तर त्याचा आकार काय असेल?

(१५)

प्रकरण ३

एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या
दोन प्रेरणा.

प्रेरणेकीकरण आणि प्रेरणा पृथक्करण.

(१५) जर एकाद्या पदार्थावर किंवा एकाद्या बिंदूवर अनेक प्रेरणा कार्य करीत असतील, तर त्यांच्या योगाने पदार्थ कोणत्या तरी दिशेने चलन पावेल. आता ज्या दिशेस पदार्थ चलन पावत आहे, त्याच्या उलट दिशेस अशी एक प्रेरणा लावितां येईल की तिच्या योगाने पदार्थ स्थिर राहिल. यावरून ही नवी प्रेरणा पदार्थावर कार्य करणाऱ्या सर्व प्रेरणांस समतोल देविते. जर या सर्व प्रेरणा काढून त्यांच्या जागीं या नव्या प्रेरणे एवढीच, पण तिच्या उलट दिशेने कार्य करणारी प्रेरणा लाविली तर पदार्थ स्थिरच राहिल. म्हणून या प्रेरणेचा परिणाम पदार्थावर कार्य करणाऱ्या मूळच्या अनेक प्रेरणा इतका झाला. यास्तव अनेक प्रेरणांच्या बरोबरीचे कार्य करणारी जी प्रेरणा तीस परिणामी किंवा फलित प्रेरणा म्हणतात.

दोन किंवा अधिक प्रेरणा पदार्थावर कार्य करीत असल्यास त्यांच्या बरोबरीची एक प्रेरणा काढणे यास प्रेरणेकीकरण म्हणतात; प्रेरणेकीकरण यंत्रस्थितिशास्त्राची

(१६)

अत्यंत महत्त्वाची शाखा आहे. त्याच्या उलट म्हणजे एका प्रेरणेच्या बरोबरीचा परिणाम उत्पन्न करणाऱ्या अनेक प्रेरणा काढणे त्यास प्रेरणापृथक्करण म्हणतात.

या प्रकरणांत प्रेरणेकीकरणाचा म्हणजे दोन किंवा अधिक प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी याचा विचार केला आहे. प्रेरणा पदार्थावर अनेक रीतींनी कार्य करितील. (१) प्रेरणा एकाच रेषेत एकाच दिशेने किंवा परस्पर उलट अशा दिशांनी कार्य करितील. (२) पदार्थावर एकाच स्थळीं त्या भिन्न भिन्न दिशांनी कार्य करितील. (३) किंवा अनेक दिशांनी पदार्थावर अनेक स्थळीं कार्य करतील. या तिन्ही रीतींनी कार्य करित असतां त्यांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी ते पाहूं.

(१६.) दोन किंवा अधिक प्रेरणा पदार्थावर एकाच स्थळीं म्हणजे एकाच बिंदूवर एकाच रेषेत कार्य करित असल्यास त्यांची परिणामी प्रेरणा काढणे.

जर एक धोंडा ओढण्यास दोन घोडे लाविले, तर दोघांच्या शक्तींच्या बेरजे इतक्या शक्तीने धोंडा ओढला जाईल. तीन, चार किंवा अधिक घोडे एकाच दिशेने ओढण्यास लाविले, तर त्या सर्वांच्या शक्तींच्या बेरजे इतक्या जोराने पदार्थ ओढला जाईल. बरे जर दोन घोडे परस्पर उलट दिशांनी पदार्थास ओढतील, तर जेव्हां दोघे सारख्या जोराचे असतील तेव्हां पदार्थ स्थिर राहील; जेव्हां त्यांच्या शक्ती सारख्या

(१०)

नसतील, म्हणजे ज्याची जास्त शक्ति असेल त्या दिशेस पदार्थ चलन पावेल. परंतु त्याच्या सर्व शक्तीनें जितका धोंडा ओढला जावा तितका जाणार नाही. तर उलट दिशेस जो घोडा ओढीत आहे त्यास प्रतिबंध करण्यास जेवढी शक्ति पाहिजे तेवढी जाऊन जी जास्त राहिल तेवढ्या शक्तीनें मात्र धोंडा चलन पावेल. म्हणजे दोघांच्या शक्तींच्या अंतरा इतक्या शक्तीनें मात्र जास्त जोराचा घोडा पदार्थास आपल्याकडे ओढील. तसेंच जर एका दिशेस कांहीं घोडे आणि त्याच्या उलट दिशेस कांहीं घोडे ओढीत असले, तरीही दोहोंकडील घोड्यांच्या जोरांच्या अंतरा इतका जास्त जोर ज्या दिशेस असेल त्या दिशेकडे धोंडा ओढला जाईल.

उदाहरणार्थ— जर क, रव या दोन भेरेणा न पदार्थास एकाच न व दिशेस ओढतील तर त्यांच्या भेरेजेचरोबर त्यांची परिणामी भेरेणा होईल.



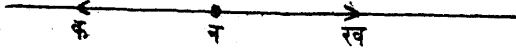
परिणामी भेरेणा दर्शविण्यास प अक्षर घेतलें तर

$$क + रव = प.$$

जर क, रव भेरेणा उलट दिशांनीं कार्य करतील तर

$$क - रव = प.$$

जर क, रव समान परिमाणाच्या भेरेणा असतील तर पदार्थ स्थिर राहिल. आणि परिणामी भेरेणा असणार नाही.



कारण पदार्थ कोणत्याच दिशेस चलन पावणार नाही.

$$क — ख = ००$$

जर $क_१, क_२, क_३, क_४$, इत्यादि अनेक प्रेरणा एकाच दिशेस कार्य करतील तर,

$$क_१ + क_२ + क_३ + क_४ = प$$

आतां जर $क_१, क_२, क_३, \dots$ इत्यादि प्रेरणा एका दिशेस आणि $ख_१, ख_२, ख_३, ख_४$ इत्यादि प्रेरणा उलट दिशेस कार्य करित असतील तर:-

$$(क_१ + क_२ + क_३) - (ख_१ + ख_२ + ख_३) = प$$

एवढें लक्षांत ठेवावें कीं, जर $क_१, क_२$ वगैरे ज्या दिशेस कार्य करित आहेत त्या दिशेस धनदिशा आणि त्या दिशेस कार्य करणाऱ्या प्रेरणांस धन कल्पिलें तर त्याच्या उलट दिशेस कार्य करणाऱ्या प्रेरणांस ऋण मानावें, आणि त्या प्रेरणादुर्शक चिन्हांमागे ऋणचिन्ह लिहावें. असें केले तर एकारेषेंत कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणांच्या केवळ बेरजेबरोबर परिणामी प्रेरणा असते.

जर उलट सुलट कार्य करणाऱ्या प्रेरणा $क, ख, ग, घ, च, छ, ज$ अशा असल्या आणि $ख, च$ आणि $छ$ ऋण असल्या तर:-

क-रव + ग + घ - च - छ + ज = प.

ज्या वेळीं या सर्वां प्रेरणांची बेरीज शून्य होईल, तेव्हां त्यांस परिणामी प्रेरणा असणार नाही; म्हणजे त्यांच्या कार्यनिं पदार्थ कोणत्याच दिशेस चलन न पावतां स्थिर राहिल, अशावेळीं त्या समतोल आहेत असें समजावे, आणि अशा प्रेरणा समतोल असण्यास त्यांची बेरीज शून्य असणे म्हणजे परिणामी प्रेरणा शून्य असणे अवश्य आहे.

यासव एकाच रेषेत कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणांचें समतोलत्व दर्शविणारे समीकरण असें होईल;

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_n = 0$$

(१७) भिन्नभिन्न दिशांनीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणांचीं परिणामी प्रेरणा काढणे.

हा सिद्धांत यंत्रस्थितिशास्त्रांनीं ल फार महत्त्वाचा असून यावरच मुख्यत्वे कसून या शास्त्राची इमारत उभारलेली आहे. हा पायाभूत सिद्धांत सिद्ध करण्या पूर्वीं काहीं गोष्टी सांगणे अवश्य आहेत, त्या सांगून सिद्धांत सिद्ध करूं.

समजा कीं, **क** आणि **रव** या दोन प्रेरणा एका पदार्थावर **अ** बिंदुस्थळीं भिन्न दिशांनीं कार्य करित आहेत, या दोन्ही प्रेरणा दर्शविण्यासाठीं **अ क** आणि **अ रव** या दोन रेषा, प्रेरणा ज्या दिशांनीं कार्य करित आहेत त्या दिशांनीं व प्रेरणांच्या प्रमाणांत लांबीनें अशा कादाः व दिशा दर्शविण्या

च शिवटीं तिरांचीं टोकें काढाः

हें सष्ट आहे कीं, **क** भेरणेचा परिणाम **अ** बिंदूस **अ**,
क रेषेंत गति देण्याचा आहे, आणि **रव** चा **अ** **रव** रेषेंत ग-
 ति देण्याचा आहे आतां दोनही भेरणा एकदम कार्य करीत आ-
 हेंत, परंतु **अ** बिंदु दोनही दिशांनीं एक काळीं चलन पावणार ना-
 हीं हें उघड आहे, तर दोनही भेरणा एकदम कार्य करितील तेव्हां
अ बिंदु **अ** **क** व **अ** **रव** या दोहोंच्या मध्यंतरी कोणत्या त-
 री दिशेंत चलन पावेल. सम-

जा कीं, **अ** **प** ही एक भेरणा

अ बिंदूवर तेवढाच परिणाम

उत्पन्न करिते, तर त्या दोन भेरणां-**अ**

च्या जागीं ही एक भेरणा लावि-

ली तरी **अ** बिंदूवर तेवढाच फ-

रिणाम होणार आहे म्हणून **अ**,

प किंवा **प** ही **क** व **रव** यांच्या बरोबरीची किंवा परिणामी

भेरणा होय. या परिणामी भेरणेची दिशा व परिमाण आम्हांस

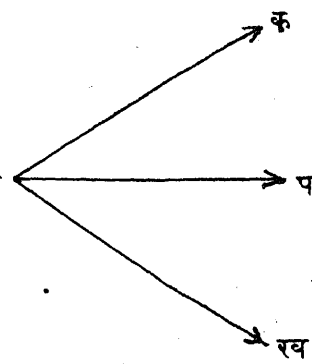
काढणें आहे. तसेंच जर **क**, **रव**, **ग**, **घ**, **च**, **छ** इत्यादि अने-

क भेरणा **अ** बिंदूवर भिन्नभिन्न दिशांनीं कार्य करतील, तर या

सर्वांच्या एवढाच परिणाम उत्पन्न करणारी एक **प** भेरणा असूं

शकेल. कारण **क**, **रव** यांच्या बरोबरीचें कार्य करणारी **प**,

भेरणा असेल तर **क**, **रव** या भेरणांच्या जागीं एकटी **प**, भे-



णा ठेवितां येईल. नंतर **प**, आणि **ग** यांच्या जागीं यांच्या बरोबरीचे कार्य करणारी **प**, ही भ्ररणा ठेवितां येईल. या भ्रमाणें करीत गेल्यास सर्व भ्ररणांच्या बरोबरीचें कार्य करणारी **प** ही भ्ररणा निघेल.

(१०) यावरून हें ही उघड आहे कीं, जर अनेक भ्ररणा पदार्थावर एका स्थळीं कार्य करीत असून पदार्थ स्थिर राहिल, तर त्यांपैकीं कोणतीही एक भ्ररणा चाकी सर्व भ्ररणांच्या परिणामी भ्ररणेच्या बरोबरीची व उलट दिशेनें कार्य करणारी असेल.

समजा कीं, **क**_१ **क**_२ **क**_३ **क**_४ **क**_५ अशा सहा भ्ररणा अ बिंदूवर कार्य करीत असतां अ बिंदु स्थिर राहतो.

मागील कलमांत सांगित-

ल्या भ्रमाणें **क**_१ **क**_२ **क**_५

अशा पांच भ्ररणांच्या जागीं त्यांच्या

बरोबरीचें कार्य करणारी एक भ्ररणा

अ **प** ठेवितां येईल. आतां ज्या पे-

क्षां साही भ्ररणांच्या कार्यनें अ बिंदु स्थिर राहतो, त्यापेक्षां बाकी

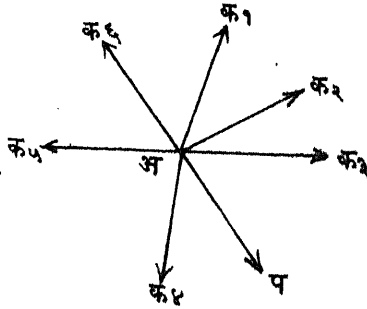
राहिलेली सहावी भ्ररणा

अ **क**_५ आणि अ **प** पांचांची

परिणामी भ्ररणा चा समान व परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करणा-

च्या असल्या पाहिजेत. या भ्रमाणें दुसऱ्या कोणत्याही पांच भ्रर-

णा घेऊन त्यांची परिणामी भ्ररणा बाकी राहिलेल्या भ्ररणेशीं परि-



(२२)

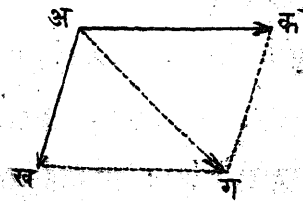
माणानें समान व दिशेनें उलट अशी असेल. यास्तव जेव्हां अनेक प्रेरणा समतोल असतील तेव्हां त्यांपैकी कोणतीही एक प्रेरणा बाकी प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेशीं समान व उलट अशी असेल.

आम्ही जेव्हां एकाद्या रेषेस प्रेरणा असें म्हणतो तेव्हां ती रेषाच प्रेरणा आहे असें न समजतां प्रेरणा दर्शविणारी रेषा असें समजावें. आतां भिन्नभिन्न दिशांनीं कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी तें सांगतो.

(१९) दोन प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिमाण व तिची दिशा पुढील सिद्धांतानें काढितां येते तो सिद्धांत असा आहे:-

पदाथविर एका बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणांची परिमाणें व दिशा दर्शविण्यास त्या बिंदूतून काढिलेल्या दोन रेषा झेतल्या आणि ज्याच्या या दोन रेषा जवळजवळच्या बाजू आहेत, असा समांतर भुज चौकोन काढिला, तर मूळ बिंदूतून जाणारा जो याचा कर्ण तो दोहों प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिमाण व दिशा दर्शविले. या सिद्धांतास प्रेरणा समांतर भुज चौकोन असें म्हणतात.

जर अ क आणि अ र च या रेषा क, र च प्रेरणा दर्शवितील आणि या ज्याच्या जवळ जवळच्या बाजू आहेत असा त्यावर अ क र



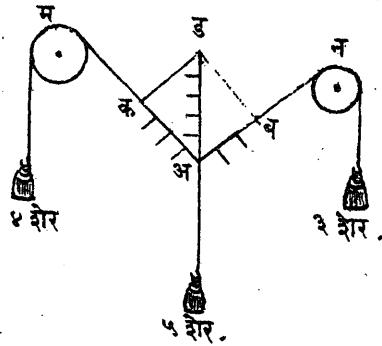
(२३)

रव हा समांतरभुज चौकोन काढिला तर क, रव यांची परिणामी प्रेरणा अ, ग रेषा दर्शविल.

(२०) प्रथमतः या सिद्धांताची सत्यता प्रत्यक्ष प्रयोगाने कशी पहावी ते सांगते.

म आणि न या दोन लहान कप्या उभ्या भिंतीत बसविल्या आहेत. ३ शेर व ४ शेर ही वजनं जिच्या शेवटांस अडकविली आहेत अशी दोरी या दोहों कप्यांवरून सोडिली आहे. आतां दोहोंकप्यां मधील दोरीच्या भागातील एक अ, विंदुस्थळी ५ शेराने वजन टांगिले तर हे वजन दोरीस खाली ओढील आणि म अ न कोन करून सर्व वजनं स्थिर होतील.

अ, म आणि अ, न या दोऱ्या अनुक्रमे ४ शेर व ३ शेर जोराने ओढित आहेत. यांची परिणामी प्रेरणा ५ शेर वजना इतकी व त्याच्या उलट दिशेने कार्य करणारी आहे.



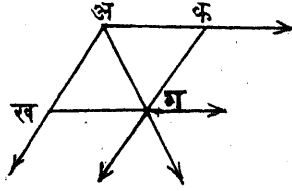
अ न दोरीत तीन समान भाग पाडलेला अ, ब भाग घे आणि तेवढाले चार भाग पाडलेला अ, क भाग अ, म दोरीचा घे अ, ब ड क हा समांतर भुज चौकोन पुराकर. तर असे अनुभववास येईल की, अ, ड क्षितिजाशी लंब असेल. म्हणून ५ शेर वजन ज्या दिशेने कार्य करित आहे त्याच दिशेत असेल. जर अ, ड ची लांबी

(२४)

मोजिली तर अ व अ क चांचे जेवढाले ३ व ४ भाग पाडिले आहेत तेवढाले अ ङ मध्ये पांच भाग असतील, म्हणून अ हरेषा अ व व अ क चारेषा ज्या प्रेरणा दर्शवितात त्यांची परिणामी प्रेरणा परिमाणाने व दिशेने दर्शविते.

(२१) आतां प्रेरणा समांतर भुज चौकोनाचा सिद्धांत सिद्ध करू.

जेव्हा दोन प्रेरणा समान असतील तेव्हा त्यांस दर्शविणाऱ्या रेषांवरील समांतर भुज चौकोनाचा त्याच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा दर्शविल. जर अ क, अ र व या दोन समान प्रेरणा अ स्थळीं कार्य करित असतील, तर त्यांवरील अ क ग र व समांतर भुज चौकोनाचा कर्ण अ ग त्यांच्याप



रिणामी प्रेरणेची दिशा होईल. कारण अ क ग र व यांच्या चारी बाजू समान असल्यामुळे अ ग कर्ण क अ र व कोनास दुभागील. ज्या पक्षां अ क, अ र व या समान प्रेरणा आहेत, त्यापेक्षां त्यांची परिणामी प्रेरणा अ क कडे जास्त वळलेली असणार नाही, किंवा अ र व कडेही असणार नाही. म्हणून ती बरोबर दोहोंच्या मध्ये असेल म्हणजे दोहों मधील कोनास दुभागाच्या रेषेतच ती कार्य करील. प्रेरणा संचरत्याच्या नियमाप्रमाणे अ ग प्रेरणा दु दिशांनी लाविली तरी तेवढाच परिणाम होईल. तसेच अ गच्या जागीं अ र व व अ क प्रेरणा लाविल्या तरी परिणाम तेवढाच होईल.

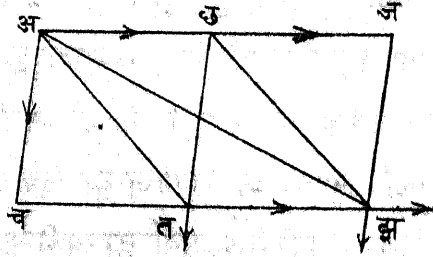
(२) जर एका बिंदूवर क आणि क या भेरेणा कार्य करीत असतील, तरीही त्यांवरील समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णाच्या दिशेने त्यांची परिणामी भेरेणा कार्य करील.

क, रव, ग या तीन समान भेरेणा आहेत. क भेरेणा अस्थळीं अ-च रेषेत कार्य करिते; आणि रव, ग या अस्थळीं अ छ ज या एकाच रेषेत कार्य करितात.

अ-च आणि अ छ

या रेषा क, रव भेरेणा दर्शविण्या जोग्या घे; ग भेरेणा

अ, ज रेषेत कोणत्याही स्थळीं कार्य करीत आहे असे



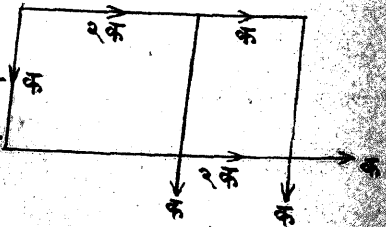
घेतले तरी हरकत नाही; म्हणून ग भेरेणा अ स्थळीं कार्य करीत आहे असे घे, आणि छ ज रेषा तिचे परिमाण दर्शविण्यास घे.

आतां अ-च त छ आणि त झ ज छ हे समांतरभुज चौकोन काढ, आणि अ त, छ ज हे कर्ण काढ. वर सिद्ध केलेल्या प्रमाणे अ-च व अ छ या समान भेरेणांची परिणामी भेरेणा अ त दिशेने कार्य करील अ-च व अ छ या भेरेणांच्या जागी त्यांचीही परिणामी भेरेणा कार्य करीत आहे असे घे. ऊ. ही भेरेणा अ त रेषेत कोणत्याही ठिकाणी कार्य करीत आहे असे समजण्यास हरकत नाही. ती त स्थळीं कार्य करीत आहे असे समजू. आतां त स्थळीं क, रव भेरेणा अ-च, अ छ रेषांशी स-

संतर अशा लु त आणि त झ या रेषांत कार्य करणाऱ्या प्रेरणा ठेव. समजा की क प्रेरणात स्थळीं कार्य न करितां लु स्थळीं कार्य करित आहे व रव प्रेरणा झ स्थळीं कार्य करित आहे.

लु स्थळीं ग प्रेरणा कार्य करित आहेच आणि आतां क प्रेरणा कार्य करू लागली. या प्रेरणा समान आहेत म्हणून यांची परिणामी प्रेरणा लु झ कर्ण रेषेत कार्य करील. ही परिणामी प्रेरणा लु तिकाणीं कार्य न करितां झ स्थळीं कार्य करित आहे, असें समजू. त्या तिकाणीं तिच्या जागीं तिच्या घटक प्रेरणा क, ग अवस्थित तर क प्रेरणा ज झ दिशेनें आणि ग प्रेरणा त झ दिशेनें कार्य करितील. पूर्वी झ स्थळींत झ दिशेनें कार्य करणारी रव प्रेरणा होती व आतां ग आली, यास्तव झ स्थळीं क आणि ग, रव या प्रेरणा कार्य करित आहेत. या तीनही प्रेरणा पूर्वी झ स्थळीं कार्य करित होत्या व त्याच आतां झ स्थळीं कार्य करित आहेत. झ हा बिंदु अ झ या अ च झ ज या समांतर भुज चौकोनाच्या कर्णातील आहे. यास्तव क आणि रव, ग या प्रेरणा अ झ दिशेनें कार्य करित असल्या पाहिजेत; म्हणजे त्यांची परिणामी प्रेरणा कर्ण रेषेत कार्य करिते असें झाले. रव + ग = ३क. म्हणून जर क, ३क या प्रेरणा असतील तर त्यांबरील समांतर भुज चौकोनाचा कर्ण परिणामी प्रेरणेची दिशा दर्शवितो.

(३) याच प्रमाणें क आणि ३क या प्रेरणा असतील, तरी बाजूच्या आकृ



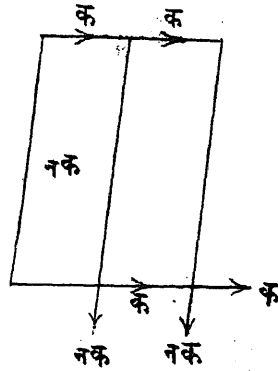
(२७)

नि वरून सिद्धांत सिद्ध होते.

तसेंच क आणि ४क किंवा क आणि नक या भेरेणा असतील तरी सिद्धांत रवरा आहे. मात्र न पूर्ण संख्या असली पाहिजे.

(१) आतां ज्यापेक्षां नक आणि क भेरेणा असतां सिद्धांत रवरा आहे त्यापेक्षां नक आणि २क भेरेणा असल्यासही रवरा आहे हें पुढील आकृतिवरून स्पष्ट होईल.

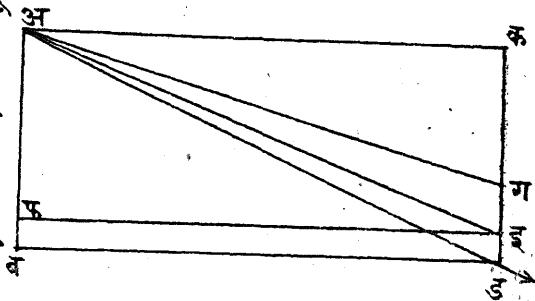
तसेंच नक आणि ३क किंवा नक आणि ४क भेरेणा असतांही सिद्धांत रवरा आहे. या स्थळीही म पूर्ण संख्या असली पाहिजे.



यावरून ज्या दोन भेरेणांस एकसाधारण गुणक आहे. अशा भेरेणा असल्यास त्या भेरेणा दर्शविणाऱ्या रेषांवरील समांतरभुज त्रिकोणाचा कर्ण त्यांच्या परिणामी भेरेणेची दिशा दर्शवितो.

(२२) आतां जेव्हा भेरेणा अज्ञानसतील तेव्हांही सिद्धांत रवरा असतो हें सिद्ध करूं.

अब, अक
या दोन रेषा अशा
भेरेणा दर्शविणाऱ्या
आहेत. यांवर अब-



ड क समांतर भुज चौकोन काढ. आतां जर याचा अड कर्ण त्यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा दर्शवित नसेल, तर अ ग रेषा ती दिशा दर्शविते, असें घेऊं. प्रत्येक भाग ग ड हून लहान असे अ क चे समान भाग पाड. तेवढालेच क ड चे विभाग पाड. शेवटला विभाग ग, ड या बिंदूंच्या मध्ये येईल. शेवटला भाग इ स्थळीं आळा असें समजू. इ बिंदूतून इ फ, अ क शीं समांतर काढ. तर अ न क आणि अ फ या दोन रेषा अशा प्रेरणा दर्शवितात कीं, ज्यांचे विवक्षित भागा एवेद किंवा ज्यांस साधारण गुणक आहे असे पूर्ण भाग पाडितां येतात. या करितां वर सिद्ध केल्या प्रमाणें त्यांवरील समांतर भुज चौकोनाचा कर्ण अ इ या रेषेंत त्यांची परिणामी प्रेरणा कार्य करील. अ क, अ फ यांच्या जागीं त्यांची अ इ रेषेंत कार्य करणाऱी परिणामी प्रेरणा घेऊं. मूळच्या अ ब, अ क प्रेरणांपैकीं अ फ, अ क यांची परिणामी प्रेरणा अ इ आहे. तेव्हां त्यांची परिणामी प्रेरणा काढण्यास अ इ आणि फ ब यांची परिणामी प्रेरणा काढिली पाहिजे. फ ब प्रेरणा फ पासून अ बिंदू स्थळीं ने. तेव्हां अ ई आणि फ ब यांची परिणामी प्रेरणा या दोहों प्रेरणांच्या मधून गेली पाहिजे, हें उघड आहे. परंतु अ न ग ही अ क, अ ब यांची परिणामी प्रेरणा आहे असें कल्पितें आहे. ही तर या दोहोंच्या बाहेर आहे. यांच्या बाहेर परिणामी प्रेरणा असणें अशक्य आहे. या करितां अ ग रेषेंत त्यांची परिणामी प्रेरणा कार्य करणार नाही. या प्रमाणें अ ड दिवाच

(२९)

दोहों मेरणांच्या मध्ये दुसरी कोणतीही रेषा घेतली, तरी तीत परिणामी मेरणा कार्य करित नाही असे सिद्ध करिता येईल. यास्तव त्यांची परिणामी मेरणा अड कर्ण रेषेतच कार्य करिते.

(२३) कर्ण परिणामी मेरणेचे परिमाणही दर्शवितो हे सिद्ध करू.

अब, अक या रेषा अस्थळी कार्य करणाऱ्या दोन मेरणा दर्शवितात. अबडक हा समांतरसुज कोन काढ. अड

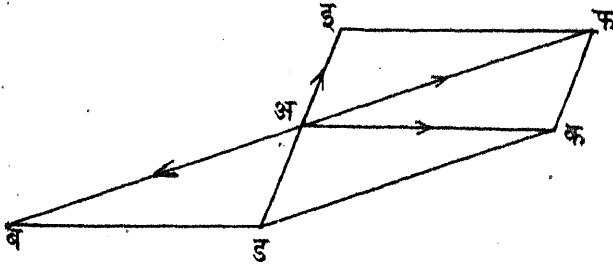
साध.

तर अब,

अक या

ची परिणा

मी मेरणा



अड रेषेत कार्य करील. अड वाढवून अब, अक यांच्या परिणामी मेरणेचे परिणाम दर्शविण्याजोगी अई घे. तेव्हा अब, अक, अई या रेषा परस्पर समतोल असणाऱ्या मेरणा दर्शवितात. यास्तव यांपैकी कोणती तरी एक दुसऱ्या दोहोंच्या परिणामी मेरणेच्या बरोबरीची व उलट दिशेने कार्य करणारी असेल. म्हणून अब, अक आणि अई यांच्या परिणामी मेरणेच्या बरोबरीची परंतु उलट दिशेने कार्य करणारी आहे. अई फक हा समांतरसुज चौकोन पुरा करून अफ कर्ण काढ. म्हणजे अई आणि अक यांची परिणामी

प्रेरणा अफ दिशेने कार्य करील, म्हणून अ ब आणि अ फा
का रेंपेंत असल्या पाहिजेत.

या करितां ब फ रेषा कडुशीं समांतर आहे, आणि क-
फ, डईशीं समांतर आहे, म्हणून अड कफ हा समांतर
भुज चौकोन आहे.

अड — कफ.

कफ — अड.

अड — अई.

फसंतु अ :- इ रेषा अ ब, अ क यांच्या परिणामी प्रेरणेचें
परिमाण दर्शविणाऱी रेषा घेतली होती. म्हणून अड कर्ण परि-
णामी प्रेरणेचें परिमाणही दर्शवितो. पूर्वी कर्ण तिची कार्यदर्शक
रेषा दर्शवितो हें सिद्ध केले आहे. यास्तव एका बिंदूंत कार्य कर-
णाऱ्या प्रेरणा दर्शविणाऱ्या रेषांवर समांतर भुज चौकोन काढिला,
तर त्याचा त्या बिंदूंत जाणारा कर्ण त्यांच्या परिणामी प्रेरणेची
दिशा व तिचें परिमाण दर्शवितो, हें सिद्ध झालें.

(२४) दोन प्रेरणा समान असतां त्यांच्या कार्यदर्शक रेषां-
वर काढलेल्या समान भुज चौकोनाचा, प्रेरणा ज्या स्थळीं कार्य क-
रितात त्या स्थळांतून काढलेला कर्ण त्यांची परिणामी प्रेरणा दर्श-
वितो. एवढें सिद्ध केल्यावर दुसऱ्या एका रीतीनें प्रेरणा समांतर भुज
चौकोनाचा सिद्ध करितां येतो. ती रीति येथे सांगतो.

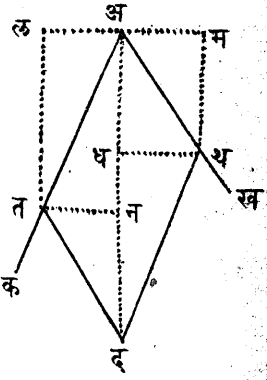
(१) मध्यमवः दोन प्रेरणा असमान आहेत व त्यांच्या का-

नाही असें घेऊं.

पूर्वी प्रमाणेंच अत दध समांतरभुज चौकोन पुराक-
रून अद कर्ण काढ. अद वर त आणि थ पासून त न
आणि थ ध लंब काढ. तसेंच त, थ पासून अदशी समां-
तर रेषा काढ. आणि अ पासून त नशी समांतर रेषा काढ; ती
त, थ पासून काढलेल्या रेषांस लू आणि
म ठिकाणी मिळते.

तन = थध = म अ = अल.

वरील सिद्धतेवरून अत व अथ
या रेषा अल व अन आणि अम
व अध यांच्या अनुक्रमें परिणामी प्रे-
रणा दर्शवितात. म्हणून त्या दोहोंच्या

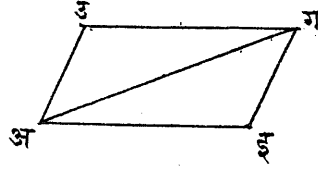


जागीं या चार प्रेरणा घेतां येतील. यांपैकीं अल व अम या
परस्पर समान व उलट असल्यानें परस्पर नाश पावतील, व
बाकी अन व अध राहतील. परंतु अन = दध, म्हणून
अन + अध = अध + दध = अद ही प्रेरणा मू-
ळच्या अत व अथ यांच्या जागीं आहे. म्हणजे ती त्यांची
परिणामी प्रेरणा आहे.

(२५) दोहों प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा मोठ्या प्रेरणेच्या अ-
धिक जवळ असते. अई आणि अऊ या रेषा क रव प्रेरणा
दर्शवितात. यांपैकीं क प्रेरणा रव पक्षां मोठी आहे.

(३३)

अई गउ हासमांतरभुज चौकोन पुरा करः आणि अग सांघ अगरेषा क आणि रव चांची परिणामी प्रेरणा दर्शविते.



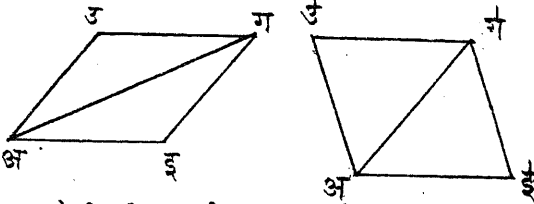
आतां जर ग अइ कोन ग अउ कोनापेक्षा लहान असेल तर अग, अउपेक्षां अइ च्या अधिक जवळ असेल.

कारण अइ = गउ. गउ / अइ; ∴ ∠गअउ / ∠अगउ (यु. बु. १, सिं. १८) परंतु ∠अगउ = ∠गअई; ∴ ∠गअउ / ∠गअई; ∴ अग, अउ च्या पेक्षां अइ च्या अधिक जवळ आहे हे सिद्ध झाले.

(२६) दोहों प्रेरणां मधील कोन जास्त मोठा असेल, तशी त्यांची परिणामी प्रेरणा लहान असते.

क आणि रव चा दोन प्रेरणां मधील कोन उअई असतां जी त्यांची परिणामी प्रे-

रणाअ ग असेल तिजपेक्षां तोच कोन याहून मोठा म्हण-



जे उ अ इ असेल तर त्यांची परिणामी प्रेरणा अ ग ही लहान असेल.

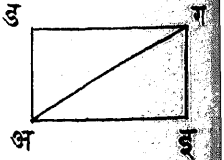
लहान कोन असतां अइ आणि अउ या रेषा क, रव प्रेरणा दर्शवितात; आणि मोठा कोन असतां अई आणि अउ या रेषा क, रव प्रेरणा दर्शवितात. अइ गउ आणि अई गउ समांतरभुज चौकोन पुरेकर.

अइ = अई, इग = ईग आणि ∠अइग / ∠अईग
∴ अग / अग हे सिद्ध.

(२७) या वस्तूत हे उघड आहे की, एका बिंदूस्येकीं कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणांच्या दिशा व त्याचीं परिमाणें माहीत असलीं कीं, आ-

षणास त्यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा व तिचे परिणाम केवळ भूमिती में काढितां येतील. हें काढण्यास ज्या स्थळीं ज्या दिशेनें प्रेरणा काढी करीत असतील, त्या बिंदूतून त्या दिशेनें दोन रेषा काढून त्यांच्या मधील बी प्रेरणांच्या परिमाणाच्या प्रमाणांत घ्याव्या. नंतर त्यांवर समांतर रभुज चौकोन काढून दिलेल्या बिंदूतून कर्ण काढावा. म्हणजे तो कर्ण परिणामी प्रेरणा दिशेनें व परिमाणानें दर्शवील. यास्तव ज्या स्थळीं आम्हांस समांतररभुज चौकोनाच्या कर्णाची लांबी काढतां येईल, त्यावेळीं परिणामी प्रेरणा केवळ भूमितीनें समजेल. कित्येक उदाहरणांत मात्र हें कर्णाचे परिमाण त्रिकोणमितीच्या सहाय्याशिवाय काढितां येते.

उदाहरण १.— क, र व या प्रेरणा एका स्थळीं दोहोंमध्ये चा कोन करून कार्य करीत आहेत, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ. अ इ, अ ड या रेषा प्रेरणा दर्शविण्यास घे. अ ड हा समांतररभुज चौकोन पुरा कर, म्हणजे अ ग कर्ण परिणामी प्रेरणा दर्शवितो.



अ ड हा कोन काढकोन आहे, म्हणून (यु. बु. १ सि. ४७)

$$अग^2 = अइ^2 + गइ^2$$

$$गइ^2 = अड^2$$

$$\therefore अग^2 = अइ^2 + अड^2$$

$$अग = \sqrt{(अइ^2 + अड^2)}$$

$$प^2 = क^2 + र^2, प = \sqrt{(क^2 + र^2)}$$

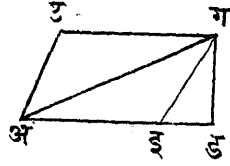
यास्तव दोहों प्रेरणांच्या दिशांमधील कोन काढकोन असित तर त्यांच्या वर्गांच्या बेरजेच्या वर्गमुळा बरोबर परिणामी प्रेरणा असते.

$$\text{जर } क = र व, \text{ तर } प = \sqrt{(२क^2)} = क\sqrt{२}$$

उदाहरण २.— जर क, र व या दोन प्रेरणांच्या दिशांमध्ये

(३५)

६०° चा कोन असेल तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ. अ इ, अ उ या रेषा क, रव प्रेरणा दर्शविताने. त्यांचे अ इ ग उ समांतरभुज चौकोन काढ. अ ग परिणामी प्रेरणा होईल ग पासून अ इ वर ग ड हा लंब काढ.



$\angle उअई = ६०^\circ \therefore \angle गइअ = १२०^\circ, \angle गइड = ६०^\circ$
 (सु. बु-२ सि० १२) अग = अई + गई + २अइ. इड. आणि $\angle उगड = ९०^\circ$, आणि $\angle उगइ = ६०^\circ \therefore \angle इगड = ३०^\circ$
 $\therefore इड = \frac{१}{२} गइ = \frac{१}{२} रव$

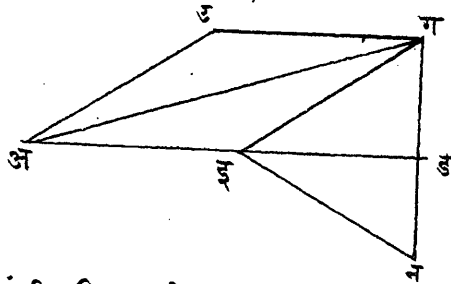
$प = क + रव + २क \times \frac{१}{२} रव = क + रव + करव$
 $\therefore प = \sqrt{(क + रव + करव)}$

जर क = १५, रव = ९

तर $प = \sqrt{(२२५ + ८१ + १३५)} = \sqrt{(४४१)} = २१$

उदाहरण ३- जर क, रव प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करीत असतील व त्यांच्या दिशांमधील कोन ३०° असेल, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ?

अ इ, अ उ या रेषा क, रव प्रेरणा दर्शविण्यासाठी, व त्यांचे अ इ ग उ समांतरभुज चौकोन काढ. व त्याचा कर्ण अ ग काढ.



तर अ ग कर्ण अ इ, अ उ यांची परिणामी प्रेरणा आहे.

अ इ वादवून तिजवर ग ड लंब काढ. इ पासून इ न रेषा अशी काढकी, इ ड शी ग इ ड एवढा कोन करील. व ग ड सन स्थळी मिळेल.

$\angle उअई = \angle गइड = \angle उइन = ३०^\circ \therefore \angle इगड = ६०^\circ$

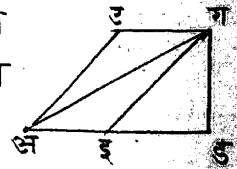
(१६)

$$\therefore \angle \text{इगड} = \angle \text{गइन} = \angle \text{इनग} = ६०^\circ.$$

गइन हा समभुज त्रिकोण झाला. \therefore गइ = इन = गन = रव.
यास्तव इड = गई - गडे = रव - $(\frac{रव}{२})^२ = \frac{३}{४}$ रव \therefore इड = $\frac{३रव}{४}$
(सु. बु. २. सि. १२) अगे = अई + ईगे + २ अई. इड
पै = कै + रव + २क. $\frac{३रव}{४} \sqrt{३} = कै + रव + करव \sqrt{३}$.
 \therefore प = $\sqrt{(कै + रव + करव \sqrt{३})}$

उदाहरण ४ - जर क रव या प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करित असतील, आणि त्यां मधील कोन १५° असेल. तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ.

अइ, अउ यारेषा क, रव प्रेरणा दर्शविण्यास घे, व त्यांवर समांतरभुज चौकोन व त्याचा कर्ण काढ.



$$\text{अगे} = \text{अई} + \text{गई} + २ \text{अइ. इड}$$

$$\angle \text{गइड} = १५^\circ.$$

$$\therefore \angle \text{इगड} = १५^\circ.$$

$$\therefore \text{गड} = \text{इड}, \therefore २ \text{इड} = \text{गई}.$$

$$\therefore \text{इड} = \frac{१}{२} \text{गई} = \frac{१}{२} \text{अउ}$$

$$\text{इड} = \frac{\text{अउ}}{\sqrt{२}} = \frac{\text{अउ} \sqrt{२}}{२} \times \frac{\text{अउ} \sqrt{२}}{२}$$

$$\text{अगे} = \text{अई} + \text{अउ} + २ \text{अइ. इड}$$

$$\text{पै} = कै + रव + २क \times \frac{१}{२} रव \sqrt{२}$$

$$= कै + रव + करव \sqrt{२}.$$

$$\therefore \text{प} = \sqrt{(कै + रव + करव \sqrt{२})}$$

उदाहरण ५ - याच प्रमाणे दोहों प्रेरणां मधील कोन १२०° , १२५° ; आणि १५०° असतील तेव्हां त्यांच्या परिणामी प्रेरणा काढ. जर प्रमाणे आकृति काढून कुटी केल्यास परिणामी प्रेरणांच्या सारख्या अशा घेतील.

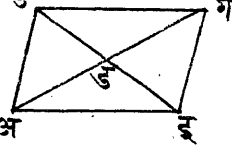
(३७)

कोन १२०° असतां, $p = \sqrt{(कै + रवै - करव)}$.

कोन १३५° असतां, $p = \sqrt{(कै + रवै - करव\sqrt{२})}$.

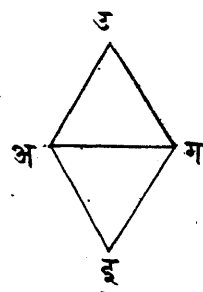
कोन १५०° असतां, $p = \sqrt{(कै + रवै - करव\sqrt{३})}$.

(२८) चौरस व हांबस यांचे कर्ण त्यांच्या कोनास दुभागतात. यांच्या चारी बाजू सारख्या असतात. यास्तव दोन समान भेरेणा असतील तर त्यांची परिणामी भेरेणा त्यां मधील कोनास नेहमी दुभागील. तसेंच कोणत्याही समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्पर दुभागतात. या करितां एका बिंदूंत कार्य करणाऱ्या भेरेणा दर्शविणाऱ्या अण्ड व अउ रेषा असतील तर, त्यांचीं उड्ड टोके सांधून उड्ड रेषाद्वय स्थळीं दुभागिली आणि जर अण्ड, उड्ड बिंदु सांधिले, तर अण्ड त्यांच्या परिणामी भेरेणेची दिशा दर्शविल, आणि अण्ड च्या दुप्पट अण्ड अतिचें परिमाण असेल. कारण $२ अण्ड = अण्ड$. यारीतीने परिणामी भेरेणा काढणें कित्येक वेळां फार उपयोगी पडते.



उदाहरण ६.— जर दोन समान भेरेणा एका बिंदूवर कार्य करतील; आणि त्यांच्या दिशामधील कोन १२०° असेल, तर त्यांची परिणामी भेरेणा एका भेरेणेबरोबर होईल हें दारवीच.

अण्ड, अउ या दोन रेषा समान भेरेणा दर्शविणाऱ्या आहेत, व उअण्ड हा कोन १२०° चा आहे. अण्डगउ हा समांतरभुज चौकोन पुरा कर आणि अण्डग कर्ण काढ.



अण्ड व अउ समान आहेत, म्हणून अण्डग कर्ण उअण्ड कोनास दुभागितो.

$$\angle उअण्ड = \angle गअण्ड = \angle अण्डइ = ६०^\circ$$

$$\angle अउग = ६०^\circ$$

म्हणून अण्डगउ, हा समभुज त्रिकोण झाला.

(२०)

∴ अग = अउ = अइ.

ग अ वाढवून अग = अड घेतली; तर अड, अइ आणि अड यांस समतोल धरील. $\angle उअड = \angle डअइ = १२०^\circ$.

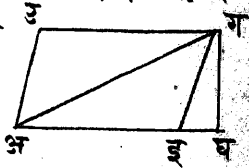
टीप- यास्तव तीन समान भ्रंशणा परस्परांशीं १२०° कोन करप्याजोग्या दिशांनीं एका स्थळीं कार्य करतील तर त्या समतोल असतील.

टीप- तसेंच जर तीन भ्रंशणा एका स्थळीं कार्य करित असून जर समतोल असतील तर तिसरी भ्रंशणा २-या दोहोंशीं सारखे कोन करील.

(२२) दोहों भ्रंशणांचीं परिमाणें माहीत असून त्यां मधील कोन माहीत असला, तर परिणामी भ्रंशणेचें परिमाण काढण्याची सर्व साधारण सारणी सांगतां. यास मात्र थोडेसें त्रिकोण मित्तीचें ज्ञान लागेल.

अइ, अउ यांरुपा क, ख या भ्रंशणा दर्शवितान. त्यां मधील कोन उ अई θ अक्षर दर्शवितें.

अइ गउ हा समांतरभुज चौकोन पुरा कर, आणि अगसांध तर अगरेषा त्यांची परिणामी भ्रंशणा दर्शविते. म् पासून अइवर गघ लंब काढ.



अग = अइ + गइ + २अइ. घइ.

(घ-डू-१ सि. (२))

गइ = अउ; $\angle उअइ = \angle गइघ = \theta$.

$\frac{घइ}{गइ} = \frac{घइ}{अउ} = \cot \theta$. ∴ घइ = अउ. को भु θ .

∴ पे = के + ख + २क × ख. को भु θ .

परिणामी भ्रंशणा काढण्याची ही सर्व साधारण सारणी आहे. या-
बद्दल मागील विदोष प्रकार कसे मिळतान तेपहा.

(१) जर $\theta = १०^\circ$, को भु $१० = १$, ∴ पे = के + ख.

(२) जर $\theta = १२०^\circ$, को भु $१२० = -१$ ∴ पे = के + ख - क ख.

(३९)

(३) जर $\angle \theta = 125^\circ$, को. भु. $125^\circ = -\sqrt{2}$ \therefore पे = कै + रवे - करव $\sqrt{2}$.

(४) जर $\angle \theta = 100^\circ$, को. भु. $100^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ \therefore पे = कै + रवे - करव $\sqrt{2}$

(५) जर $\angle \theta = 60^\circ$, को. भु. $60^\circ = \frac{1}{2}$, \therefore पे = कै + रवे + करव.

(६) जर $\angle \theta = 145^\circ$, को. भु. $145^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, \therefore पे = कै + रवे + करव $\sqrt{2}$.

(७) जर $\angle \theta = 30^\circ$, को. भु. $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, \therefore पे = कै + रवे + करव $\sqrt{2}$

(८) जर क = रव; तर पे = कै + कै + २कै. को. भु. (θ) = २कै (को. भु θ + १)

(९) जर क = रव, आणि $\angle \theta = 92^\circ$, तर को. भु. $92^\circ = -\frac{1}{2}$.

\therefore पे = कै + कै + २कै $\times -\frac{1}{2} = कै \therefore$ प = क.

बरील सारणीवरून परिणामी भ्रंशेने परिमाण समजते. तिन्ही दिशा समजण्यासग अड कोन समजला पाहिजे.

\angle ग अड = γ असे कल्पू, तर.

\angle उ अग = \angle अगड = $\theta - \gamma$.

म्हणून $\frac{\text{अड}}{\text{गड}} = \frac{\text{अड}}{\text{अड}} = \frac{\text{भु}(\text{अगड})}{\text{भु}(\text{गअड})} = \frac{\text{भु}(\text{उअग})}{\text{भु}(\text{गअड})}$

$\frac{\text{क}}{\text{रव}} = \frac{\text{भु}(\theta - \gamma)}{\text{भु}(\gamma)}$

\therefore क भु (γ) = रव. भु (θ) को. भु (γ) - रव. को भु (θ) +

भु (γ) \therefore भु (γ) (क + रव को. भु. (θ)) = रव भु (θ) को भु (γ)

स्पर्शरे. (γ) = $\frac{\text{रव. भु. } \theta}{\text{क + रव को भु } \theta}$.

उदाहरणे.

(१) १२ डेर व ३५ डेर अक्षा दोन भ्रंशेणा परस्पराशीं काटकोन करण्या जोग्या दिशांची एका बिंदूवर कार्य करीत आहेत. तर त्यांची परिणामी भ्रंशेणा काढ.

उ. ३७ डेर

(२) एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या दोन भ्रंशेणांच्या दिशा परस्परां-

इ
०.
कर
नस
जा
रु
मा
गसा
न
र
ग
व

T-

(४०)

शीं काढकोन करितात व त्या २ : $\sqrt{५}$ या प्रमाणांत आहेत. त्यांची परिणामी मेरणा ८१ शेरांची आहे तर मेरणा काढ.

उ. ६ शेरा. $३\sqrt{५}$ शेरा.

(३) दोन मेरणा एका कणावर कार्य करित आहेत. त्यांच्या म-हत्तम आणि लघुत्तम परिणामी मेरणा १७ आणि ३ शेरांच्या आहेत. तर मेरणांची परिमाणें व दिशा काय असल्या तें सांग ?

उ. ७ शेरा व १० शेरा एका रेषेंत कार्य करणाऱ्या मेरणा.

(४) दोन मेरणा परस्पर उलट दिशांनी कार्य करित असतात. नेह्यां त्यांची फलित मेरणा २८ शेरांची असते; आणि त्याच पर-स्परांशीं काढकोन करणाऱ्या दिशांनी कार्य करित असल्या तर त्यांची फलितमेरणा ५२ शेरा असते. तर मेरणा काढ.

उ. १८ शेरा, २० शेरा.

(५) एक मेरणा दुसरीच्या तिप्पट आहे, अशा दोन मेरणा एका कणावर कार्य करित आहेत. त्या अशा आहेत कीं, थोरली १ शेरांची वाढबिल्ली आणि धाकटी दुप्पट केव्ही, तरी फलित मेर-णेची दिशा बदलत नाही. तर मेरणा काय आहेत.

उ. १ शेरा व ३ शेरा.

(६) असें दाखीव कीं, जर दोहों मेरणां मधील कोन वाढविला तर फलित मेरणा कमी होते.

(७) परस्परांशीं काढकोन करणाऱ्या दिशांनी कार्य करणाऱ्या दोन मेरणांची परिणामी मेरणा ५१ शेरांची आहे व एक मेरणा २४ शेरांची आहे, तर दुसरी मेरणा काढ.

उ. १५ शेरा.

(८) असें दाखीव कीं जर दोहों मेरणांची फलित मेरणा एका मेरणाच्या दिशेची काढकोन करणाऱ्या दिशांनी कार्य करित असते, तर फलित मेरणा दुसऱ्या मेरणाहून लहान असते.

४११५

(४१)

(९) ३६ शेर आणि ६० शेर जोराच्या दोन भेरणा एका बिंदूवर कार्य करितात, व त्यांच्या दिशांमध्ये ६०° चा कोन होतो. तर त्यांची फलित भेरणा काढ.

उ. ८४ शेर.

(१०) प्रत्येक १०० शेरांची अशा दोन भेरणा एका बिंदूवर कार्य करितात व त्या दोहों मधील कोन ६०° चा आहे, तर त्यांची फलित भेरणा काढ.

उ. १७३ - २ शेर.

(११) प्रत्येक १० शेरांची अशा दोन भेरणा एका बिंदूवर कार्य करितात. आणि त्या दोहों मध्ये ४५° चा कोन आहे. तर त्यांची फलित भेरणा काढ.

उ. १९०. ४७७ शेर.

(१२) प्रत्येक ३० शेरांची अशा दोन भेरणा ३०° चा कोन करून एका बिंदूवर कार्य करितात. तर त्यांची फलित भेरणा काढ.

उ. ७५० १५५

(१३) प्रत्येक १०० शेरांची अशा दोन भेरणा १५०° चा कोन करून एका बिंदूवर कार्य करितात. तर त्यांची फलित भेरणा काढ.

उ. ५१. ७६ ३८ शेर.

(१४) ६० शेर व १६० शेर या दोन भेरणा १००° चा कोन करून एका बिंदूवर कार्य करितात. तर त्यांची फलित भेरणा काढ.

उ. १४० शेर.

(१५) २४ शेर आणि १४३ शेर, ३५ शेर व १६६ शेर, आणि ७० व ४०० शेर अशा भेरणा द्यांच्या फलित भेरणा अनुक्रमे १४५, १८५ आणि ३७० शेरांच्या आहेत. त्यांच्या मधील कोन अनुक्रमे ९०°, ६०° आणि १२०° चे आहेत हे दारवीव.

(१६) एका कणावर दोन भेरणा कार्य करीत आहेत. त्यांपैकी एक

(४२)

५ शेंरांची आहे. आणि त्यांची फळित भेरणाही ५ शेंरांची आहे. वति-
ची कार्यदर्शक रेषा वरील ५ शेंरांच्या भेरणेच्या दिशेशी काटकौन क-
रिते. तर दुसऱ्या भेरणेचे परिमाण व दिशा काढ.

उ. ५√२ शेंरा, दुसऱ्या भेरणेच्या दिशेशी १३५°, चा कोन करिते.

(१७) ५ आणि ३ या दोन भेरणा एकमेकांस किती कलत्या अ-
साव्या म्हणजे त्यांची फळित भेरणा एकीशी काटकौन करील.

उ. १२०

(१८) ३, ६, ९ शेंरांच्या ३ भेरणा एका कणावर कार्य करून
न त्यास समतोल ठेवितात. तर असें दारवीवकीं, त्या एकारेषंत का-
र्य करितात.

(४३)

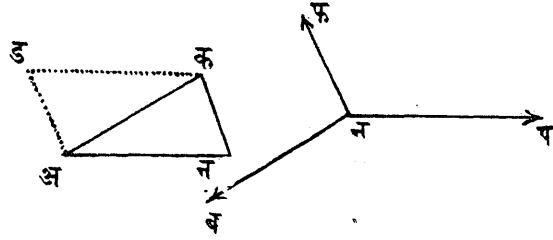
प्रकरण ३.

एका स्थळीं कार्य करणाऱ्या अनेक मेरणा.

(३०) मेरणा त्रिकोण— त्रिकोणाच्या तीन बाजू क्रमानें जर एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या तीन मेरणांची परिमाणेवकार्य मार्ग दृशिवितील तर त्या मेरणा समतोल असतील.

अबक एक त्रिकोण आहे. याच्या तीन बाजू अब, बक आणि कअ, एका न बिंदूवर नप, नफ, नब दिशांनीं कार्य करणाऱ्या प, फ, ब या तीन मेरणांची परिमाणे व कार्य मार्ग दृशिवितील; तर त्या मेरणा

या तीन बाजूंच्या प्रमाणांत असतील, आणि त्यांच्या दिशा या बाजूंशीं



समांतर असतील तर प, फ, ब समतोल असतील.

अ वून अड बकशीं आणि क वून कड अबशीं समांतर काढ.

आतां अ ब आणि अड रेषा ज्या मेरणा दृशिवितील त्यांची परिणामी मेरणा अक रेषा परिमाणानें व दिशेनें दृशिविल. अड, बकशीं समांतर व बरोबर आहे, म्हणून जी मेरणा ब क नें दृशिविली जाईल, ती मेरणा अड रेषेनें ही दृशिविली जाईल. म्हणून प, फ या मेरणा अब अड रेषा दृशिवितात. म्हणून प, फ यांची परिणामी मेरणा अक आहे. ब मेरणा क अ रेषा दृशिविते म्हणून,

प,फ,ब यातीन प्रेरणा अक आणि क अ या प्रेरणा बरोबर आहेत. प-
रंतु अक, कअ या समान व विरुद्ध असल्याने समतोल असतील; म्ह-
णून प,फ,ब याही प्रेरणा समतोल असतील.

या सिद्धांतास प्रेरणा त्रिकोण असें नांव देतात. याच्या प्रति-
ज्ञेत जें सांगितलें तें विद्यार्थ्यांनीं चांगलें लक्षांत आणिलें पाहिजे. बा-
जू क्रमानें घेणें, म्हणजे एक बिंदु आकृतीच्या सभोंवार उलट किंवा
सुलट फिरविला असतां ज्या क्रमानें बाजू घेतिल तशा घेणें होय.
म्हणजे जर अ ब रेषा एक प्रेरणा दर्शविल तर दुसऱ्या प्रेरणा दर्श-
विण्यास बक, कअ रेषाच घेतल्या पाहिजेत. बक अक घे-
तां येणार नाहीत. किंवा कब, कअ अगर कब, अक याही
घेतां येणार नाहीत. तसेंच या प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करीत आ-
हेत, म्हणून अ ब, बक आणि क अ याच रेषा वस्तुतः प्रेरणा दर्श-
वीत नसून, एका बिंदूपासून याशीं समांतर आणि ज्या दिशेस का-
र्य करीत आहेत त्या दिशेस काढलेल्या समांतर रेषा प्रेरणा दर्शवि-
तात. परंतु हें बरोबर न समजल्यासुद्धें अ ब, बक आणि क अ या-
च रेषांनीं परिमाणानें व स्थानानें दर्शविलेल्या प्रेरणा समतोल आ-
हेत असें समजतात, तशी गोष्ट नाही हें पक्के लक्षांत ठेवावें; आणि
प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या आहेत हेंही लक्षांत ठेवावें. या-
कडे लक्ष पोचविण्यास्तव दिशा या शब्दाचा उपयोग न करितां का-
र्यमार्गी याचा उपयोग प्रतिज्ञेत केला आहे.

या सिद्धांता वरून एक गोष्ट उघड आहे कीं जर त्रिकोणाच्या
दोन बाजू क्रमानें दोन प्रेरणांचीं परिमाणे व कार्य मार्ग दर्शवितील, त-
र त्यांची तिसरी बाजू उलट क्रमानें घेतल्यास ती त्यांची परिणामी
प्रेरणा परिमाणानें व कार्यमार्गानें दर्शविल.

(३१) जर तीन प्रेरणा पदाधीवर एका स्थळीं कार्य करीत
नसून समतोल असतील, आणि जर यांच्या कार्यमार्ग दर्शविणाऱ्या

(१५)

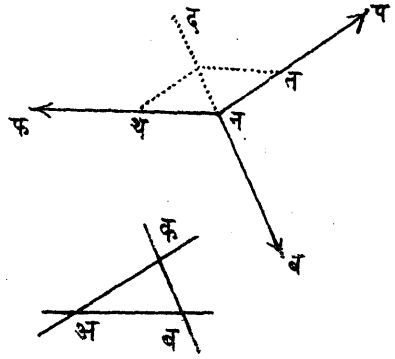
रेखांशीं समांतर ज्याच्या बाजू आहेत असा एक त्रिकोण काढिला, तर त्याच्या बाजू ज्याशीं समांतर आहेत त्या प्रेरणाशीं प्रमाणांत असतील.

प, फ, ब या तीन प्रेरणा न बिंदुस्थळीं कार्य करित असून समतोल आहेत.

प, फ प्रेरणांच्या कार्यदर्शक रेखांत त आणि थ असे बिंदु घ्या कीं; न त व न थ रेखा प व फ यांच्या प्रमाणांत असतील.

$\frac{नत}{नथ} = \frac{प}{फ}$. आतां न त आणि न थ यांवर समांतरभुज त्रिकोण न त द थ काढ. आणि न द सांघत

र न द रेखा प आणि फ यांची परिणामी प्रेरणा दर्शवील, म्हणून प, फ यांच्या जागीं न द प्रेरणा ठेवितां येईल. परंतु प, फ प्रेरणास ब प्रेरणा समतोल ठेविते. म्हणून न ब आणि न द एक रेषेत असतील. आणि न द



रेखा ब प्रेरणा दर्शवील. न थ = त द, याकरितां न त द त्रिकोणाच्या न त, त द आणि द न या बाजू प, फ, ब या प्रेरणांच्या प्रमाणांत आहेत.

आतां अ ब क हा एक त्रिकोण असा काढ कीं; त्याच्या तीनही बाजू न त द त्रिकोणाच्या बाजूंशीं समांतर असतील तर अ ब क आणि न त द हे दोनही त्रिकोण सरूप असतील.

∴ (घु. बुद्धि. सि.) नत : तद :: बक : कअ.

आणि प : फ :: बक : कअ.

तन : नद :: कब : बअ.

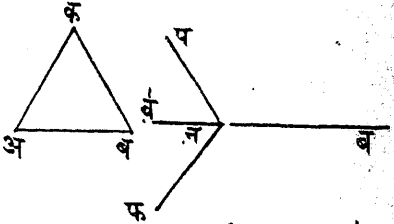
फ : ब :: कब : बअ.

∴ प : ब :: बक : बअ.

(४६)

∴ पः फः वाः बकः कअः बअ.

टीप- जर प, फ या दोन प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा ब असेल आणि जर ज्याच्या बाजू प, फ, ब या प्रेरणांशीं समांतर आहेत असा एक त्रिकोण काढिला तर त्याच्या बाजूही या प्रेरणांशीं प्रमाणांत असतील. कारण समजा की ब ही प्रेरणा प, फ प्रेरणांस समतोल ठेविते, तर ब प्रेरणा ब प्रेरणांशीं समान व उलट असली पाहिजे. म्हणून अ ब क त्रिकोणाच्या बाजू प, फ, ब या प्रेरणांशीं बरील सिद्धांता प्रमाणें प्रमाणांत आहेत.



∴ अकः कबः बअः ∴ पः फः ∴ व. परंतु व = ब

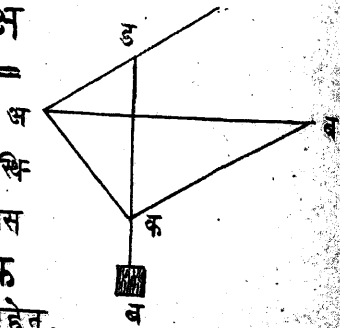
अकः कबः बअः ∴ पः फः ब

(३२) कांहीं उदाहरणें देतां त्यांवरून प्रेरणा त्रिकोणाचा कसा उपयोग होतो हें लक्षांत घेईल.

(१) व वजन क अ आणि क ब या दोन विवक्षित लांबीच्या दोन्यांस टांगिलें आहे व त्यांचीं शेवटें क्षिनिज पातळीशीं समांतर रेषेंत अ ब ठिकाणीं अडकविलीं आहेत. तर जेव्हां दोन्या परस्पर काटकोन करतील, तेव्हां प्रत्येकींवर वजनाचा किती ताण पडेल तें सांग.

क अ, क ब यांच्या लांब्यां व घ अक्षरें दर्शवितात असें घेऊं. तर अ क ब काटकोन आहे. म्हणून अ ब = अ + घ.

क बिंदु तीन प्रेरणांच्या कार्यानिष्ठिर आहे. व वजन क व यालंब रेषेंत त्यास त्याचीं झोडीन आहे. आणि क अ, क ब या दोन्या दोहों बाजूंस नाणीत आहेत.



(४७)

अ पासून अड, ब कशीं समांतर काद, आणि ब क तिला ड
स्थळीं मिळेपर्यंत वादीव. आतां अ क ड त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू क
अ व क ब यांचे ताण आणि व वजन यातीन भेराणांच्या दिशांशीं स
मांतर आहेत. म्हणून त्या बाजू या भेराणांशीं प्रमाणांत आहेत.

∴ अकः कडः : अकचें ताणः व.

परंतु अ क ड आणि अ क ब हे त्रिकोण समरूप आहेत. कारण
∠अकब = ∠डअक, ∠अडक = ∠डकब = ∠कअब, आणि ∠अकड =
∠अबक.

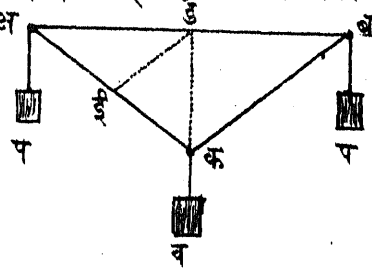
∴ अकः कडः : कबः अब.

∴ कबः अबः : अकचें ताणः व.

कब = घ आणि अक = थ ∴ अब = $\sqrt{(थ^2 + घ^2)}$

∴ अकचें ताण = $\frac{व घ}{\sqrt{(थ^2 + घ^2)}}$, तसेंच, बकचें ताण = $\frac{व थ}{\sqrt{(थ^2 + घ^2)}}$

उदाहरण २ — क्षितिज पातळीशीं समांतर अशा रेषेंत अस-
णाऱ्या अ व या दोन कण्यांवरून जाणाऱ्या आणि प्रत्येक टोंकास प प
ही समान वजनें असणाऱ्या दोन्या क ठिकाणीं गांठाबल्या आहेत व त्या-
ठिकाणीं व वजन रांगिलें आहे. तर अ व पासून विलेल्या अंतरावर क
स्थीर राहण्यास व वजन किती अ-
सलें पाहिजे.



क व वादीव आणि तिला
दुसऱ्या अ व शीं मिळूंदे. दुबिंदूत-
न ड इ, ब क शीं समांतर काद.

ज्या पेक्षां प, प सारखीं वजनें आहेत, त्या पेक्षां अ क, ब क
यांचें ताण सारखे आहेत. म्हणून ब क ड रेषा अ आणि ब यां पासून
न समान अंतरावर असेल! कारण तिला अ क डे किंवा ब क डे अधिक ज-
वळ जाण्यास कारण नाही. म्हणून अ व रेषा ड स्थळीं दुभागिली जा-

(४०)

ईल आणि त्यांतून काढलेली डुई समांतर रेखा अकसदुभागील अ-
ब = २७ आणि कड = घ घे. कडई त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू
अकचा ताण बकचा ताण आणि व वजन या तीन प्रेरणांशी समांतर
र आहेत. म्हणून प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांता प्रमाणे.

व : अकचा ताण : : कड : कई.

∴ व. प. : : घ : $\frac{1}{2} \sqrt{(७^2 + ३^2)}$.

$$\therefore व = \frac{पघ}{\frac{1}{2} \sqrt{(७^2 + ३^2)}} = \frac{२पघ}{\sqrt{(७^2 + ३^2)}}.$$

(३३) एका स्थळीं कार्य करणाऱ्या तीन प्रेरणा जर समतोल अ-
सतील, तर प्रत्येक प्रेरणा दुसऱ्या दोन प्रेरणा मधील कोनाच्या भुजिज्या
शीं प्रमाणांत असेल.

जर प, फ, व या प्रेरणा न स्थळीं कार्य करित असून समतोल अ-
सतील, तर कलम ३१ यांत सिद्ध केव्या प्रमाणे. (क. ३१ यांतिल आकृति पहा.)

प : फ : व : : नत : तद : नद :

त्रिकोणमितींत असें सिद्ध केले आहे कीं,

नव : तद : नद : : भु (तदन) : भु (दनत) : भु (नतद)

:: भु (फनव) : भु (पनव) : भु (पनफ).

∴ प : फ : व : : भु (फनव) : भु (पनव) : भु (पनफ).

:: भु (फव) : भु (पव) : भु (पफ)

$$\text{किंचा } \frac{प.}{भु(फव)} = \frac{फ.}{भु(पव)} = \frac{व.}{भु(पफ)}.$$

जर तिहीं प्रेरणांपैकीं एक प्रेरणा उलट दिशेनें कार्य करील, म्हण-
जे ती दुसऱ्या दोहोंची परिणामी प्रेरणा असेल. तरी हें प्रमाण असेंच असतें.
कारण जर बरोच नव दिशेनें कार्य न करितां त्याच्या उलट न द दि-
शेनें कार्य करील व ती ब असेल तर.

प : फ : व : : भु (फव) : भु (पव) : भु (पफ); कारण भु (फव) =

भु. (फब), आणि भु. (पब) = भु. (पब). अशा वेळीं भ्रंशना समतोल नसतात. प, फ यांची परिणामी भ्रंशना बरे आहे म्हणून प, फ, ब यांची परिणामी भ्रंशना २ बरे होईल. म्हणून बरील सिद्धांताच्या केवळ उलट सिद्धांत खरा नाही. परंतु प्रत्येक भ्रंशना दुसऱ्या दोन भ्रंशनांच्या दिशांच्या बाहेर आहे असें प्रतिज्ञेत जास्त घातल्यानें विपर्यस्त सिद्धांत खरा होईल. नाही तर भ्रंशना समतोल असतील, किंवा त्यांची परिणामी भ्रंशना एकीच्या तुल्य असतील.

(३४) जर तीन भ्रंशना एका पातळींत दृढ पदार्थावर कार्य करून त्यास स्थिर ठेवीत असतील, तर त्यांच्या कार्य दृशिक भ्रंशना एका बिंदूंत मिळतील, किंवा त्या तीनही समांतर असतील.

जर दोन भ्रंशना परस्पर समांतर असतील तर त्यांची परिणामी भ्रंशना समांतर असते व तिच्या समतोल ठेवणारी विरुद्ध दिशेनें कार्य करणारी भ्रंशना त्याही समांतर असले, हे पुढे सिद्ध केले आहे.

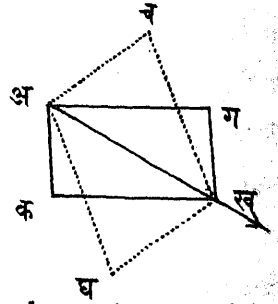
(क.) जर दोन भ्रंशना एका बिंदूंत मिळतील, तर त्यांच्या जागी त्यांची परिणामी भ्रंशना ठेविताने येईल. इत्या तिसऱ्या भ्रंशनेनें समतोल धरिले पाहिजे. असें होण्यास तिची कार्य दृशिक रेषा दोन भ्रंशना ज्या बिंदूंत मिळतील त्या बिंदूतूनच गेली पाहिजे.

(३७) ज्या प्रमाणे दोन भ्रंशनांच्या जागी त्यांची परिणामी भ्रंशना ठेविली, तरी कार्य तेवढेच होते. त्याच प्रमाणे कोणत्याही एका भ्रंशनेच्या जागी तिच्या एवढेच कार्य करणाऱ्या दोन भ्रंशना ठेविल्या तरी तेवढेच कार्य होईल. जशा दोन भ्रंशनांची एक परिणामी भ्रंशना काढितां येते, त्या प्रमाणे एका भ्रंशनाच्या बरोबरीचे कार्य करणाऱ्या दोन किंवा अधिक भ्रंशना काढितां येतात. म्हणजे एका भ्रंशनेचे तिच्या घटक भ्रंशनेंत पृथक्करण करितां येते. यास भ्रंशनापृथक्करण म्हणतात.

समजा कीं, अख रेखा एक भ्रंशना दृशिविते. ज्याचा कर्ण अख होईल असा एक अकरवग समांतरभुज चौकोन काढ. तर मग

(५०)

गील सिद्धांता प्रमाणें अक आणि अग या रेषांनी दर्शविणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा अरव रेषा दर्शविल. या स्तव अरव प्रेरणेच्या बरोबरीच्या अक, अग या दोन प्रेरणा निघाल्या.

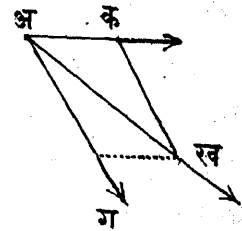
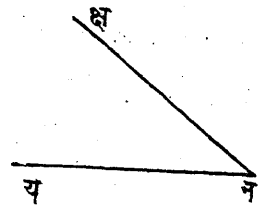


या प्रमाणें ज्याचा कर्ण अरव आ

हे असें अघरवच. अरवज असे अनेक समांतरभुज चौकोल काढितां येतील. म्हणून अरवच्या बरोबरीचीं अनेक प्रेरणा द्वयें मिळतील. बरें यांपैकीं एकेका प्रेरणा द्वयाच्या प्रत्येक प्रेरणेबरोबर आणखी दोन प्रेरणा काढितां येतील. त्यांच्या बरोबर आणखी प्रेरणा द्वयें निघतील. साऱांश एका प्रेरणेबरोबर असंख्य प्रेरणा काढितां येतील. आणि त्या सर्वांचे मिळून कार्य मूळच्या प्रेरणेबरोबर होईल.

(३६) परंतु जर घटक प्रेरणांनी दिलेल्या प्रेरणेशीं अमके कोन करावे, म्हणजे त्यांनीं अमक्या दिशांनीं कार्य करावें असें दिलें असेल, तर मात्र नियमित प्रेरणा निघतील. प्रत्यक्ष कोनांचीं परिमाणें दिलेली असतात किंवा घटक प्रेरणा अमक्या दोन रेषांशीं समांतर असाव्या, असें दिलें असेल.

समजा
कीं अरव रेषे
नें दर्शविणा
च्या प्रेरणेचें पृ
धकरण करणें



आहे. तिच्या घटक प्रेरणा अरव शीं अनुक्रमें 90° व 30° अंशाचे कोन करितात किंवा त्या नक्षत्र नय याशीं समांतर आहेत.

तर अ बिंदूतून अरव शीं 95° चा कोन करणारी किंवा नक्षत्रशीं समांतर अशी अग रेषा काढ. तसेंच अ पासून अरव शीं 30°

चा कोन करणारी किंवा न्युशी समांतर रेषा काढ. नंतर रव पासून रवग व रवक अग, अकशी समांतर काढ. त्या अग व अक यांसग आणि क या बिंदूत मिळतील. तर अग व अक या दोनच घटक प्रेरणा दिलेल्या दिशेने कार्य करणाऱ्या निघाल्या.

(३७) त्रिकोणमितीने हे कोन माहीत असले म्हणजे घटक प्रेरणांची परिमाणे काढिता येतात. अरव रेषेने दर्शविलेली प्रेरणा प आहे आणि हिच्या दिशेशी हिच्या घटकांच्या दिशा जे कोन करितात ते θ , ϕ आहेत असे घेऊं; म्हणजे \angle रवअग = θ , \angle रवअक = ϕ .

त्रिकोणमितीवरून

$$\text{अग} : \text{अरव} :: \text{भु} (\text{अरवग}) : \text{भु} (\text{अगरव}).$$

$$:: \text{भु} (\text{रवअक}) : \text{भु} (\text{गअक}).$$

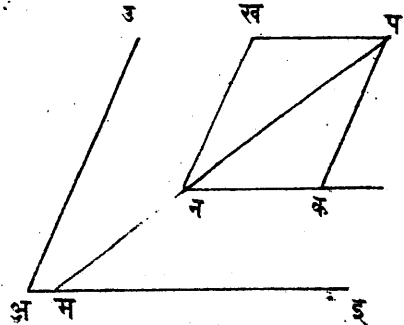
$$:: \text{भु} (\phi) : \text{भु} (\theta + \phi).$$

$$\therefore \text{अग} = \text{अरव} \frac{\text{भु} \cdot \phi}{\text{भु} (\theta + \phi)} = \text{प} \frac{\text{भु} (\phi)}{\text{भु} (\theta + \phi)}.$$

$$\text{तसेंच} \quad \text{अक} = \text{अरव} \frac{\text{भु} (\theta)}{\text{भु} (\theta + \phi)} = \text{प} \frac{\text{भु} (\theta)}{\text{भु} (\theta + \phi)}.$$

(३८) साधारणतः ज्या दोन रेषांशी घटक प्रेरणा समांतर असावयाच्या त्यांमधील कोन, आणि दोन्हीपैकी एकीशी दिलेली प्रेरणा जो कोन करील तो कोन असे दिलेले असतात.

प ही दिलेली प्रेरणा न बिंदूवर कार्य करित असून तिच्या दोन अशा घटक प्रेरणा काढावयाच्या कीं त्यांच्या दिशा अड आणि अउ या स्थिर रेषांशी समांतर होतील. अड व अउ यांमधील कोन θ आहे आणि दिलेली प प्रेरणा अडशी θ कोन कर



रिते. नप, अईस मस्यकीं मिलेपर्यंत वादीव. \angle उअइ = स, \angle पमइ = ७.

न बिंदुपासून नक, नरवरेषा अइ व अउशीं समांतर काढूनंतरप बिंदुपासून त्याच रेषांशीं समांतर रेषा काढ. म्हणजे नक परव हा समांतरभुज चौकोन झाला. यांत नप ही नक व नरव यांची फलित प्रेरणा आहे. नक व नरव अइ व अउशीं समांतर आहेत. म्हणून नक व नरव हेपचे इष्टघटक झाले. आतां यांच्या किमती दिलेली प्रेरणा आणि दिलेले कोन यांमध्ये काढू.

$$\angle$$
पनक = \angle नमइ = ७; \angle खनक = \angle उअई = स.
 \therefore \angle खनप = \angle नपक = \angle स-७.

नक व नरव प्रेरणा करव अक्षरांनीं दर्शवूं.

नक प त्रिकोणांत—

$$\frac{\text{नक}}{\text{नप}} = \frac{\text{क}}{\text{प}} = \frac{\text{भु. (नपक)}}{\text{भु. (नकप)}} = \frac{\text{भु. (खनप)}}{\text{भु. (खनक)}} = \frac{\text{भु. (स-७)}}{\text{भु. (स)}}.$$

$$\therefore \text{क} = \text{प} \frac{\text{भु. (स-७)}}{\text{भु. (स)}}.$$

$$\frac{\text{नसेंच}}{\text{नप}} = \frac{\text{रुप}}{\text{नप}} = \frac{\text{नरव}}{\text{नप}} = \frac{\text{रव}}{\text{प}} = \frac{\text{भु. (पनक)}}{\text{भु. (नकप)}} = \frac{\text{भु. (७)}}{\text{भु. (स)}}.$$

$$\therefore \text{रव} = \text{प} \frac{\text{भु. (७)}}{\text{भु. (स)}}.$$

जेव्हां दिलेल्या दोन रेषांमधील कोन काढकोन असतो. तेव्हां घटक प्रेरणांच्या किमती अशा होतील.

$$\text{क} = \frac{\text{प भु. (११-अ)}}{\text{भु. (१०)}} = \text{प. को. भु. (७)}.$$

$$\text{कारण भु. (१०-७)} = \text{को. भु. (७)}.$$

$$\text{भु. (१०)} = १$$

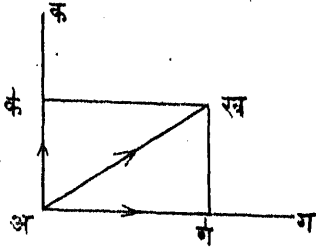
(५३)

$$\text{रव} = \frac{\text{प. भु.}(\theta)}{\text{भु.}(१०)} = \text{प. भु.}(\theta).$$

बहुधां परस्पर काटकोन करणाऱ्या अशा दोन रेषांत किंवा त्यांशीं समांतर अशा घटक भेरेणांत दिलेल्या भेरेणांचें पृथक्करण करितात, आणि दिलेल्या रेषांपैकीं एका रेषेचीं दिलेली भेरेणा जो कोन करिते तो म्हणजे θ कोन मात्र दि-लेला असतो, व तेवढ्यावरून घटक भेरेणांचां परिमाणें काढितां येतात. याचाउ-पयोग पुढें बरचेंबर घेईल. यास्तव यांची सत्यता प्रत्यक्ष आकृतीनें दाखवितों.

समजा कीं, अ रव रेषेनें दर्शविणाऱ्या प भेरेणेचे परस्पर काटकोन करणाऱ्या क आणि ग भेरेणांमध्ये पृथक्करण करणें आहे. ग एक घटक भे-रणा अ रवशीं θ कोन करिते.

तर अ पासून अ रवशीं θ कोन क-रणारी रेषा अ ग काट. नंतर अ क, अ ग-शीं लंब काट. नंतर रव वृत्त अ ग आणि अ क यांशीं समांतर रेषा काढून अ क रव ग हा समांतर भुज चौकोन पुराकर.



$$\frac{\text{अ ग}}{\text{अ रव}} = \text{को. भु.}(\theta) \therefore \frac{\text{ग}}{\text{प}} = \text{को. भु.}(\theta) \therefore \text{ग} = \text{प को. भु.}(\theta)$$

$$\frac{\text{अ क}}{\text{अ रव}} = \text{को. भु.}(१० - \theta) = \text{भु.}(\theta) \therefore \frac{\text{क}}{\text{प}} = \text{भु.}(\theta) \therefore \text{क} = \text{प भु.}(\theta)$$

यास्तव दिलेल्या भेरेणेचें, त्यांच्या दिशा परस्परांशीं लंब आहेत. अशा दोन घटकांत पृथक्करण करणें असेल आणि एक घटक भेरेणा दि-लेल्या भेरेणेचीं जो कोन करिते तो कोन दिला असेल. तेव्हां दिलेल्या भेरेणे-स त्या कोनाच्या को भुजिज्येनें व भूमिज्येनें गुणून घटक भेरेणा एकदम काढितां येतील.

जेव्हां एका भेरेणेच्या दोन घटकांच्या दिशा परस्परांशीं काट-कोन करितात, तेव्हां प्रत्येक घटकास त्याच्या दिशेतील पृथक्भूत भा-

ग असं म्हणतात. जेव्हा प्रेरणेचा विवक्षित दिशेतील पृथग्भूत भाग असं म्हणलं असेल तेथे असं समजावयाचं कीं, प्रेरणेचे अशा दोन घटकांत पृथक्करण केले आहे कीं, एक दिलेल्या दिशेत व दुसरा तिच्याशी लंब दिशेत व त्याच पातळीत असे कार्य करितात.

वरील सिद्धांताची खालील परिभाषा ही कित्येक वेळा उपयोगी पडते.

(३९) दिलेल्या दिशेत विवक्षित प्रेरणेचा परिणाम काढणे.

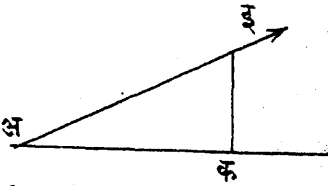
अरव रेषेनें दर्शविणाऱ्या प प्रेरणेचा दिलेल्या दिशेत परिणाम काढणे आहे.

अ पासून अगरेषा दिलेल्या दिशेशीं समांतर काढ, तर अस्थ-
ळींच्या कणास अगरेषेत ओढण्याचें प प्रेरणेचें किती सामर्थ्य आहे.
हें काढावयाचें आहे. (मागील आकृति पहा.)

रव पासून रवग हा अगवर लंब काढ. आणि अगरेषेक हा समांतर भुज चौकान पुराकर.

तर अग व अक रेखांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा प आहे; परंतु अगवर अक लंब असल्यामुळे, अक प्रेरणेचे अग दिशेत काही कार्य घडणार नाही. म्हणून अग प्रेरणा प प्रेरणेचा अग दिशेतील सर्व परिणाम दाखविते.

या करितां जर अड रेषा एका प्रेरणेचें परिमाण व दिशा दर्शवि-



त असेल आणि तिचा अनुशीं समांतर अशा कोणत्याही रेषेत किती परिणाम पडेल हें काढणे असेल तर इ पासून अनुवर इक लंब काढावा. म्हणजे अक रेषा तो परिणाम दर्शवील.

या सीतेनें त्रिकोण मित्तीच्या सहाय्यानें प्रेरणांचें पृथक्करण करून अनेक प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिमाण व दिशा काढितां. ये-

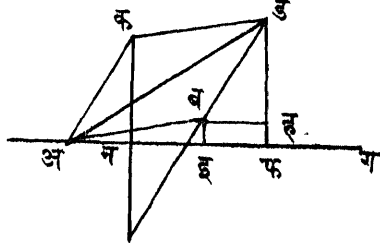
(५५)

तात. जेव्हां घेरणेच्या दोन घटकांच्या दिशा परस्पर काटकोन करितात तेव्हां त्याक घटकास त्या दिशांतील घेरणेचा पृथग्भूत भाग असें म्हणतात. जेव्हां आम्ही घेरणेच्या विवक्षित दिशांत कार्य करणारा पृथग्भूत भाग असें म्हणूं तेव्हां असें समजावयाचें कीं, घेरणेचे अशा दोन घटकांत पृथक्करण केले आहे कीं, एक घटक दिलेल्या दिशांत व दुसरा तिच्याशीं लंब दिशांत असे कार्य करितात.

(४०) कोणत्याही दिलेल्या दिशांत एका बिंदूंत कार्य करणाऱ्या दोन घेरणांच्या परिणामी घेरणेचा पृथग्भूत भाग त्याच दिशांत त्याच्या घटक घेरणेच्या पृथग्भूत भागांच्या बेरजे बरोबर असतो.

अब, अक रेषा दोन घेरणा दर्शवितात. अबडक समांतरभुज चौकोन काढ. म्हणजे अब रेषा त्यांची परिणामी घेरणा दर्शवील.

अतून जाणारी अग ही एक रेषा आहे. या रेषेत अब, अक आणि अब यांच्या घटक घेरणा काढिल्या तर अबची घटक घेरणा अब, अक यांच्या घटक घेरणांच्या बेरजे बरोबर होईल. ब, क



आणि ड पासून अगवर बड, कन आणि डफ हे लंब काढ. आणि बपासून अगशीं बह समांतर काढ. तर अफ, अबची, अड, अबची, आणि अन, अकची घटक घेरणा होईल.

$$\text{अफ} = \text{अड} + \text{फड}:$$

$$\text{फड} = \text{बह} - \text{अन}.$$

कारण अकन आणि डबह यादोन त्रिकोणांत अक = डब, \angle अब = \angle डबह, आणि \angle अनक = \angle बहड = 90° ; म्हणून हे त्रिकोण एकरूप आहेत. आणि अन = बह.

$$\therefore \text{अफ} = \text{अड} + \text{अन}.$$

(५६)

(४१) अनेक भेरणा एका बिंदुस्थळीं कार्य करीत असतील, तर त्यांची परिणामी भेरणा कशी काढावी. आणि अनेक भेरणा सप्तकोण राहण्यास कोणत्या गोष्टी अवश्य लागतात ते पाहू.

(४२) जर अनेक भेरणा एकाच रेषेत कार्य करीत असतील, तर त्यांची परिणामी भेरणा त्यांच्या साध्या बेरजेबरोबर होईल.

समजा कीं, k_1, k_2, k_3, \dots भेरणा एका रेषेत एका दिशेस कार्य करीत असतील आणि r_1, r_2, r_3 इत्यादि त्याच रेषेत पण विरुद्ध दिशेने कार्य करीत असतील तर एकेका दिशेस कार्य करणाऱ्या भेरणांच्या परिणामी भेरणा अशा होतील.

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \dots - - - = p_1.$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \dots - - - = p_2.$$

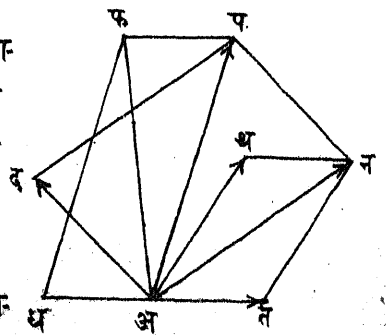
या भेरणा परस्पर विरुद्ध आहेत म्हणून त्यांच्या वजाबाकी बरोबर परिणामी भेरणा होईल, व जी भेरणा मोठी असेल त्या दिशेस कार्य करील.

$$(k_1 + k_2 + k_3 \dots) - (r_1 + r_2 + r_3 \dots) = p - p_2$$

(४३) भिन्नभिन्न दिशांनी कार्य करणाऱ्या अनेक भेरणा एका बिंदूवर कार्य करतील तेव्हां त्यांची परिणामी भेरणा काढणें.

अत, अथ, अद, अध...

रेषा $k_1, k_2, k_3, k_4 \dots$ भेरणा दर्शवितात. त्या अ बिंदूवर कार्य करीत आहेत. यांची परिणामी भेरणा काढणें आहे. अत, अथ यांवर समांतर भुज चौकोन त अ काढून त्याचा अन कर्ण काढ. तर अन रेषा k_1, k_2 यांची परिणामी भेरणा दर्शविते.



(७७)

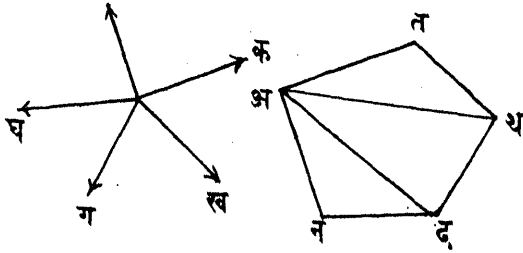
याचप्रमाणें अन आणि अद यांवर समांतरभुज चौकोन काढ. तर त्याचा कर्ण अ प क, क_२ आणि क_३ यांची परिणामी भ्रंशणा होईल. तसेंच अफ आणि अध यांची परिणामी भ्रंशणा अफ ही क_१, क_२, क_३ आणि क_४ यांची परिणामी भ्रंशणा होईल. या प्रमाणें करीत गेल्यानें कितीही भ्रंशणांची परिणामी भ्रंशणा काढितां येते.

(४४) एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या अनेक भ्रंशणांची परिणामी भ्रंशणा केवळ भूमितीनें काढितां येते.

समजा कीं, क, रव, ग, घ: ... इत्यादि अनेक भ्रंशणा एका बिंदूवर कार्य करीत आहेत.

अ हा एक कोणता तरी बिंदू घेऊन त्यांतून क भ्रंशणाशीं समांतर रेषा काढ.

आणि अत लांबी क भ्रंशणेच्या प्रमाणांत घे. नंतर तपासून रव भ्रंशणाशीं समांतर काढून तथ रेषेची लांबी रव च्या

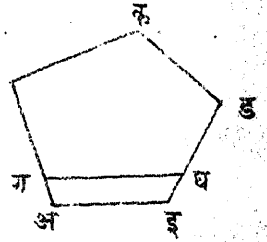


प्रमाणांत घे. थपासून गशीं समांतर रेषा काढून थ द तिच्या प्रमाणांत घे. आणि तसेंच दपासून घशीं समांतर काढून द न तिच्या प्रमाणांत घे. तर अन रेषा त्या सर्वांची परिणामी भ्रंशणा परिमाणानें व कार्यमार्गानें दर्शवील.

भ्रंशणा त्रिकोणाच्या सिद्धांतावरून ही गोष्ट उघड आहे. कारण अत, तथ यांची परिणामी भ्रंशणा अथ होईल. परंतु या रेषा क, रव भ्रंशणा दर्शवितात, म्हणून क, रव यांची परिणामी भ्रंशणा अथ आहे. अथ आणि थद यांची, म्हणजे क, रव, ग, यांची परिणामी भ्रंशणा अन द होईल; आणि अद आणि

दन यांची म्हणजे क, रच, ग, घ यांची अ न ही परिणामी प्रेरणा होईल. या प्रमाणे कितीही प्रेरणा असल्या तरी परिणामी प्रेरणाका-
दिनां येईल.

(४५) प्रेरणा बहुकोण- जर बहुकोणाच्या बाजू क्र-
मात अनेक प्रेरणांची परिमाणे व कार्यमार्ग दर्शविलेले, तर त्या प्रे-
रणा समतोल असतील. अबकडड ही एक पांच बाजूंची बहु-
कोणाकृति आहे हिच्या अब, बक, क,
ड, डड आणि ड अ रेषा पांच प्रेरणांची व
परिमाणे आणि कार्यमार्ग दर्शविले, तर त्या
प्रेरणा समतोल असतील.



कारण मागील कलमांतले सिद्धा-

ता वरून अब, बक, कड, डड यांची परिणामी प्रेरणा अड आ-
हे. या करिता ही व पांचवी प्रेरणा ड अ समान व विरुद्ध असल्या-
ने समतोल होते. यास्तव अब, बक कड डड आणि ड-
अ या पांचही प्रेरणा समतोल राहतील.

या सिद्धांतास प्रेरणा बहुकोण म्हणतात. प्रेरणा त्रिको-
णा विषयी ज्या गोष्टी क. ३० यांत सांगितल्या आहेत, त्या या-
सही लागू आहेत.

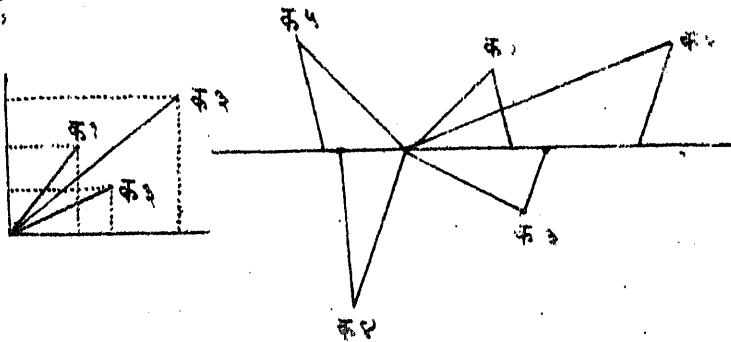
प्रेरणा त्रिकोणाचा जसा विषयीय चवरा आहे, तसा प्रेरणा
बहुकोणाचा नाही. म्हणजे चार किंवा अधिक प्रेरणा एका बिंदूवर
कार्य करून त्यास समतोल ठेविलेले, तर ज्या बहुकोणाच्या बाजू प्रे-
रणांच्या कार्यमार्गाशी समांतर आहेत, त्या प्रेरणांच्या प्रमाणांत सर्वा-
दां असू शकत नाहीत. कारण वरील आकृतीत जर अडशी गघ
समांतर काढिली, तर अबकडड आणि गबकडघ हे बहुकोण सम-
कोण आहेत, परंतु सक्षम नाहीत म्हणजे दोहोंच्या सर्वाबाजू परस्पर स-
माणांत असत नाहीत. यास्तव बहुकोणाकृतीच्या बाजू प्रेरणांशी अ-

मांतर असल्या, तरी त्यांशीं नभाणांत नसतात.

(४६) आतां अनेक भेरणा एका पातकींत कार्य करीत असतील. तेव्हां त्यांच्या परिणामी भेरणेचें परिणाम आणि दिशा त्रिकोणमितीच्या आधारेणें काढण्याची रीति सांगतों.

क_१, क_२, क_३, क_४ इत्यादि भेरणा आहेत; आणि अ_१, अ_२, अ_३, अ_४ इत्यादि कोन त्या भेरणा एका स्थिर रेषेशीं करितात.

तर क_१ भरणेचें पृथक्करण करून क_१ को भु (अ_१) आणि क_२, क_३ भु (अ_२) असे दोन घटक दिलेल्या स्थिर रेषेंत व तिच्याशीं काढकोन करणाऱ्या रेषेंत काढतां येतील. तसेंच क_४ भरणेचें क_२ को भु (अ_२) आणि क_३ भु (अ_३) असे दोन घटक काढतां येतील. या यमाणें इतर भेरणांचें ही स्थिर रेषेंत व तिच्याशीं काढकोन करणाऱ्या रेषेंत कार्य करणारे घटक निघतील. एका रेषेंत कार्य करणाऱ्या भेरणांच्या वेरजेबरोबर त्यांची परिणामी भेरणा असते. म्हणून स्थिर रेषेंत कार्य करणाऱ्या घटकांची व तिच्याशीं काढकोन करणाऱ्या रेषेंत कार्य करणाऱ्या घटकांची वेरीज करून त्यांस क्ष आणि य हीं नांवें देऊं. म्हणजे,



$$क_१ को. भु(अ_१) + क_२ को. भु(अ_२) + क_३ को. भु(अ_३) \dots = क्ष.$$

$$क_१ भु(अ_१) + क_२ भु(अ_२) + क_३ भु(अ_३) \dots = य.$$

या भेरणा परस्पर काढकोन करितात. त्यांची परिणामी भेरणा प आणि ती स्थिर रेषेची जो कोन करिते तो व अक्षरे असतील, तर—

(६०)

$$(क. २७) \quad \text{क्ष} + \text{य} = \text{पै}$$

$$\text{प को भु (ब)} = \text{क्ष}; \therefore \text{को भु (ब)} = \frac{\text{क्ष}}{\text{व}}$$

$$\text{प भु (ब)} = \text{य}; \therefore \text{भु (ब)} = \frac{\text{य}}{\text{व}}$$

$$\text{स-रे (भु ब)} = \frac{\text{य}}{\text{क्ष}}$$

(५७) या प्रेरणा समतोल असण्यास त्यांची परिणामी प्रेरणा शून्य झाली पाहिजे.

$$\text{प} = ०, \text{पै} = ०; \text{क्ष} + \text{य} = ०$$

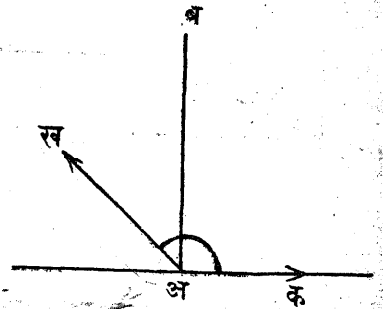
$$\therefore \text{क्ष} = ०, \text{य} = ०$$

म्हणजे प्रेरणा समतोल असण्यास विवक्षित स्थितींतील त्यांच्या घटकांची बेरीज शून्य असली पाहिजे.

आतां प्रेरणा समांतरभुज चौकोनाचीं आणखी कांहीं उदाहरणें करून दाखवितों.

उदाहरण १. — ज्यांच्या दिशा परस्परांशीं 90° चा कोन करितात अशा दोन प्रेरणा पदार्थावर एका बिंदुस्थळीं कार्य करित आहेत. यांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिमाण लहान प्रेरणे बरोबर आहे. तर त्या दोन प्रेरणांमधील प्रमाण काढ.

क आणि रव या दोन प्रेरणा अ स्थळीं कार्य करित आहेत. यापैकी क ही लहान आहे. अ क ही क प्रेरणेची दिशा आहे. अ पासून अब अकवर लंब काढ.



क, रव यांची परिणामी प्रेरणा क बरोबर दिळी आहे. ती अकशीं 90° कोन करिते असे घेऊं.

या तीनही प्रेरणांचे अक, अब रेषांत कार्य करणा-

(६२)

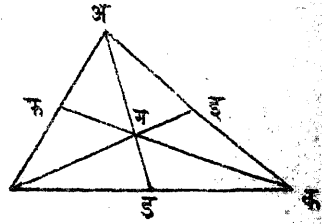
न त्यांची परिणामी प्रेरणा २ शोरांची असेल व ती डब दिशेने कार्य करील.

आतां ड स्थळीं प्रत्येक २ शोरांची अशा दोन प्रेरणा कार्य करित असून त्यांच्या दिशांमधील कोन काढकोन आहे.

यास्तव त्यांची परिणामी प्रेरणा $\sqrt{(४+४)} = २\sqrt{२}$ होईल आणि तिची कार्यदशक रेषा डब शीं ४५° चा कोन करील.

(३) अबक एक त्रिकोण आहे. बक, कअ आणि अब या बाजूंचे मध्य अनुक्रमें ड, इ, फ आहेत तर असें सिद्ध करकीं, अड, बइ, कफ. या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणा समतोल राहतील.

अड, बइ, कफ या रेषाफ का बिंदुन परस्परांस छेदितान तो बिंदु ग आहे. आणि त्या बिंदुस्थळीं या प्रेरणा कार्य करितात असें कल्पूं. व



अब आणि अक या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा अड दिशेन कार्य करील. आणि परिमाणानें अडच्या दुप्पट असेल. (क. २०) म्हणून अब आणि अक यांचें अर्ध अफ आणि अइ या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा अड रेषा दिशेने व परिमाणानें दर्शवील. तसेंच बइ आणि कफ रेषा बक आणि बइ आणि कइ व कड यांच्या अनुक्रमे परिणामी प्रेरणा दर्शवितात. यास्तव अड बइ आणि कफ प्रेरणा अक, बक व बइ व कड आणि कइ व अइ या प्रेरणां बरोबर आहेत. परंतु अफ, बफ समान व परस्पर उलत आहेत. कड व कइ व अइ आणि बइ व कड आहेत म्हणून यास हा समतोल आहेत. या रेषां यांच्या दरोबरीच्या अड, बइ आणि कफ नाही समतोल आहेत.

(४) मागील उदाहरणाच्या आकृतीत ग अ, गब, गक या रेषांनी दर्शविणाऱ्या मेरणा समतोल असतील

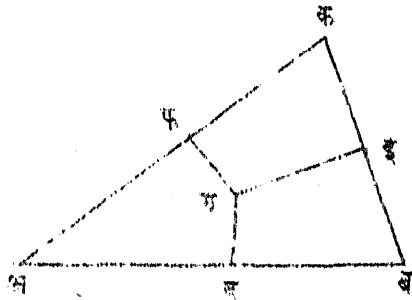
गअ आणि गब मेरणांची परिणामी मेरणा गफ दिशेने कार्य करील व परिमाणाने तिच्या दुप्पट असेल. परंतु कग रेषा गफच्या दुप्पट आहे म्हणून ग गफ आणि कग या मेरणा समान व उलट म्हणून समतोल आहेत.

टीप— गड गडू आणि गफ या तीन रेषा अग, बग आणि कग यांच्या अनुक्रमे निपट आहेत. म्हणून त्या रेषांनी दर्शविणाऱ्या मेरणाही समतोल आहेत.

(५) त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंची प्रमाणांत असणाऱ्या व त्यांवर लंब अशा दिशांनी बाजूंच्या मध्य बिंदु स्थितीं कार्य करणाऱ्या तीन मेरणा समतोल असतात.

त्रिकोणाच्या बाजूंच्या मध्यापासून बाजूवर काढलेले लंब परस्पर एका बिंदूत मिळतात. व तो बिंदु त्रिकोणा भोंवती काढलेल्या वर्तुळाचा मध्य असतो म्हणून या मेरणा एका बिंदूत मिळतात ज्या बाजूवर लंब असतील त्या बाजूंच्या मधील कोनाचा सप्लिमेंट दोहों लंबा मधील कोन असतो.

अबक त्रिकोणाच्या अब, बक आणि अक या बाजूंचे मध्य ड, डू, क आहेत. या मधून बाजूवर काढलेले लंब ग, गग, कक मिळतात.



ड गडू और गग या सप्लिमेंट आहे, ड गफ आणि

फ गडू हे कोन अ आणि क यांचे सप्लिमेंट आहे.

गड, गडू, आणि गफ या दिशांनी कार्य करणाऱ्या मेर-

(६४)

णा बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत. बाजू त्यांसमोरील कोनांच्या भुजिज्यांशीं प्रमाणांत असतात. कोनांच्या भुजिज्या त्यांच्या सप्लिमेंटाच्या भुजिज्यांबरोबर असतात म्हणून प्रत्येक प्रेरणा दुसऱ्या दोहोंच्या मधील कोनांच्या भुजिज्येशीं प्रमाणांत असते. यास्तव (क० ३३) त्या समतोल आहेत. जसें—

डग : इग : फग : : अब : बक : अक.

:: भु(क) : भु(अ) : भु(ब)

:: भु(फगइ) : भु(फगड) : भु(डगई).

(६) त्रिकोणाच्या कोनबिंदूपासून समोरच्या बाजूवर काढलेल्या लंबरेषांत कार्य करणाऱ्या तीन प्रेरणा अनुक्रमेण बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत. तर त्या समतोल असतील.

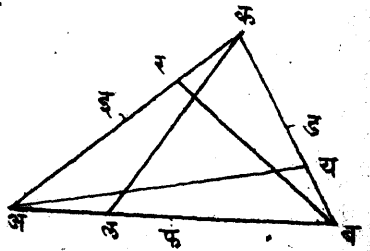
हेही लंब एकास्थळीं परस्पर छेदितात. लंबांमधील कोन त्रिकोणांच्या कोनांचे सप्लिमेंट असतात. म्हणून त्या लंबरेषांत कार्य करणाऱ्या व बाजूंशीं प्रमाणांत असणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतात.

(७) अब क त्रिकोणाच्या बक, क अ आणि अब या बाजूंन य, र, ल हे असे बिंदु घेतले आहेत कीं—

$$\frac{बय}{यक} = \frac{कर}{अर} = \frac{अल}{बल}$$

तर असे सिद्ध कर कीं अय, बर आणि कल रेषांनी दर्शविणाऱ्या प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करतील तर समतोल असतील.

ड, इ, फ हे बाजूंचे मध्यकाट. अड, बइ आणि कफ रेषा काढल्या आहेत असे समज.



अय प्रेरणेचे अड आणि डय यांमध्ये पृथक्करण क-

रणा काटावयाची आहे.

बफ वाढवून फग, बफ बरोबर कर. फग रेषा बफ प्रेरणा दर्शविते. ईफ वाढवून फह, इफ बरोबर कर; आणि गह, कह सांध.

कफ गह हा समांतरभुज चौकोन आहे. कारण-

फह = फइ = बक. आणि परस्पर समांतर. ∴ बफ = कह = फग आणि समांतर. म्हणून कफ, हग शी समांतर आहे.

∴ फह फक आणि फग यांची म्हणजे अब, बक आणि कडयाची फलित मेरणा झाली ती बक बरोबर आहे.

उदाहरणे.

(१) ३, ६, ९ शोरांच्या मेरणा एका कणावर कार्य करित असता तो कण स्थिर राहतो. तर त्या तीनही एकाच रेषेत कार्य करिताना असं दाखविच.

(२) वरील मेरणा एका समभुज त्रिकोणाच्या बाजूंशी समांतर अशा दिशांनी कार्य करित आहेत, तर त्यांची फलित मेरणा काटा

उ० ३√३ शोर ६ शोरांच्या मेरणेची काटा कोन करणारी.

(३) दोन समान मेरणा एका कणावर कार्य करित आहेत व त्यांची परिणामी मेरणा विवक्षित आहे. दोहोंपैकी एक मेरणा जर उलट दिशेने कार्य करील आणि तिचे परिमाण दुप्पट होईल, तरी ही परिणामी मेरणा पूर्वीच्या इतकीच असेल. तर दोन समान मेरणांच्या दिशांमधील कोन काटा.

उ० ६०°

(४) कसब गघ चौरसाचे कर्ण न विंदूंत परस्परांस छेदितात ना. पाहून चौरसाच्या कोन विंदूपर्यंत काटलेल्या नक, नरव, नग आणि

(६७)

नघ या दिशांनीं ५, ६, ९, १० शीरांच्या मेरणा पदार्थावर एका बिंदु-
स्थळीं कार्य करितात. तर त्यांची फलित मेरणा काढे?

उ० ६४२ शीर, गान घ कोनास दुभागणाऱ्या रेषेत.

(५) प, प४३ आणि २प अशा तीन मेरणा पदार्थावर एका स्थळीं
कार्य करून त्यास स्थिर ठेवितात. तर त्यांच्या दिशांमधील कोन काढ.

उ० प आणि प४३ यांमध्ये ९०° पव २प यांमध्ये १२०°

प४३ आणि २प यांमध्ये १५०°.

(६) समभूज षट्कोनाच्या जवळजवळच्या पांच बाजूंशीं समांतर अ-
शा दिशांनीं पांच समान मेरणा पदार्थावर एका स्थळीं कार्य करित आहे-
त. तर त्यांची परिणामी मेरणा काढे?

उ० पांचांपैकी एका मेरणेबरोबर आणि तिसऱ्या मेरणेच्या
दिशेशीं समांतर अशा दिशेत.

(७) त्रिकोणात असा एक बिंदु काढ कीं, त्यापासून कोन बिंदूप-
र्यंत रेषा काढिल्या आणि त्या रेषा ज्या मेरणा दर्शवितील त्या मेरणाऱ्या
बिंदूवर कार्य करतील, तर तो बिंदु स्थिर राहिल.

उ० कोन बिंदुव समोरच्या बाजूचा मध्य यांस
सांधणाऱ्या रेषांचा छेदन बिंदु.

(८) अबक त्रिकोणात न हा एक बिंदु आहे. डइफ हे
त्याच्या बाजूंचे मध्य आहेत. तर असें सिद्ध कर कीं, नअ, नब आ-
णि नक या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या मेरणा नड, नई, नफ. या रेषांनीं
दर्शविणाऱ्या मेरणांच्या बरोबरीच्या असतील.

(९) वर्तुळाच्या परिघाचे ह्ये तितके समान विभाग पाहिले. आणि
विभागणाऱ्या एका बिंदूपासून वाकीच्या बिंदूपर्यंत रेषा काढिल्या आ-
हेत. तर या रेषांनीं ज्या मेरणा दर्शविल्या जातात,
अशा मेरणा पदार्थावर एका स्थळीं कार्य करित आहेत त्यांची फलित
मेरणा काढ.

(६८)

उ० ज्या बिंदूपासून रेषा काढिल्या आहेत त्या पासून काढलेल्या व्यासांत फलित मेरणा कार्य करील आणि तिचे परिमाण जितके भाग पाडिले असतील तितके त्रिज्येच्या पट असेल.

(१०) प मेरणेच्या दोन घटक मेरणा अशा काढ कीं, त्यां पैकीं मत्येक मेरणा प शीं ३०° चा कोन करील.

उ० मत्येक $p\sqrt{३}$.

(११) दोहों बाजूंस ६०° व ६५° चे कोन करणाऱ्या प मेरणेच्या २ घटक मेरणा काढः

(उ० $२प(१+\sqrt{३})$, आणि प $\sqrt{६}(१+\sqrt{३})$)

(१२) ज्यांच्या दिशा परस्परांशीं काढकोन करितात अशा ५, २, ७, शोरांच्या तीन मेरणा पदार्थाविर एका स्थळीं कार्य करितात. त्यांच्या फलित मेरणेचें परिमाण काढः

उ० $\sqrt{५८}$ शेर.

(१३) एका भरीव चौरसाच्या जवळ जवळच्या तीन बाजूंचे कर्ण तीन मेरणा दर्शवितात व त्या एका बिंदूस्थळीं कार्य करीत आहेत; तर असें सिद्ध कर कीं त्याची फलित मेरणा भरीव चौरसाच्या कर्णाच्या दुप्पट होईल.

(१४) विवक्षित मेरणेचें विवक्षित परिमाणाच्या दोन मेरणांमध्ये कसे पृथक्करण करावें तें सांगः असें करणें कधीं अशक्य असतें.

(१५) प मेरणेचे असे दोन घटक काढ कीं, मत्येकाची कार्य दर्शक दिशा तिच्या दिशेशीं ३०° चा कोन असेल.

उ० मत्येक $\left(\frac{प}{\sqrt{३}}\right)$

(१६) प मेरणेचे असे दोन घटक काढ कीं त्यांच्या दिशा ति-

(६९)

या कार्यदर्शक दिशेची अनुक्रमे ६०° व ४५° चे कोन करितील.

$$उ. \frac{२५}{१+\sqrt{३}} \text{ आणि } \frac{५\sqrt{६}}{१+\sqrt{३}}$$

(१७) जिथे वजन १० शेर आहे अशी एक तसबीर एका दोरीने साफ गुळगुळीत खुंटीला बांगिली आहे. दोरीची दोन शेवटे तसबिरीला बांधलेली आहेत. जर दोरीचा ताण १० शेरांचा असेल तर खुंटीच्या दोहों बाजूंची शेवटे लंब म्हणजे विक रेपेची ६०° अंशाचा कोन करितील. असे सिद्ध कर.

उ. भेराणांचे लंब व तिच्याशी काढकोन करणाऱ्या रेषांत पृथक्करण कर.

(१८) १, $\sqrt{३}$, २ शेरांच्या भेराणा एका बिंदूवर कार्य करून त्यास स्थिर दैवितान तर त्यांच्या दिशांमधील कोन काढ.

प्रकरण ४

समांतर प्रेरणा.

*

(४८) मागील प्रकरणांत प्रेरणाविषयीं जे सिद्धांत सांगितले त्यांत असें कल्पिलें होतें कीं, दोन किंवा अधिक प्रेरणा पदार्थांवर एका स्थळीं किंवा एका बिंदूवर अगर एका कणावरच कार्य करीत आहेत. आतां दृढ पदार्थांवर प्रेरणा अनेक स्थळीं कार्य करीत असतील. तर त्यांच्या परिणामांविषयीं विचार करूं. अशा प्रेरणांच्या दिशा परस्पर समांतर असतील, किंवा नसतील. जर प्रेरणा समांतर नसतील म्हणजे जर प्रेरणांच्या कार्यदर्शक रेषा परस्पर मिकत असतील, तर प्रेरणासंचरत्वाच्या नियमाप्रमाणें प्रेरणा छेदनबिंदुस्थळीं कार्यकरितात असें कल्पून त्यांची परिणामी प्रेरणा काढितां येईल. प्रेरणा परस्पर समांतर अशा दिशांनीं अनेक स्थळीं कार्य करीत असतील. तेव्हां त्यांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी, हें सांगतों

(४९) जेव्हां दोन प्रेरणा परस्पर समांतर अशा दिशांनीं कार्य करीत आहेत. तेव्हां त्यांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी.

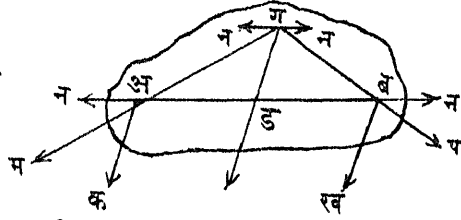
प्रेरणांचें कार्य परस्पर समांतर दिशांनीं होईल, तेव्हां त्यांचें कार्य पदार्थाच्या अनेक बिंदूवर घडेल. जेव्हां समांतर प्रेरणा पदार्थास एकाच दिशेकडे म्हणजे बाजूकडे ओदीत असतील तेव्हां त्यांस सजातीय प्रेरणा म्हणावें आणि ज्यांचें कार्य पदार्थांवर परस्पर उलट दिशांनीं होईल, त्यांस विजातीय प्रेरणा म्हणावें.

प्रथम दोन सजातीय व समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी तें सांगतों.

क आणि रव या प्रेरणा विचक्षित पदार्थांवर अ, ब बिंदुस्थळीं एक व बरव या दिशांनीं कार्य करीत आहेत. या-

ची परिणामी प्रेरणा का-
रणे आहे.

अब बिंदुसांभून
त्या रेषेत परंतु परस्पर उ-
लट दिशांनी कार्य करणा



या अशा दोन सारख्या न, न प्रेरणा अन आणि ब, न दिशांनी
पदार्थावर अब बिंदुस्थळीं कार्य करण्यास लाविल्या तर या दोन
प्रेरणा परस्पर उलट दिशांनी एकारेषेत कार्य करणाऱ्या असल्या-
नें त्यांपासून क, रव प्रेरणांच्या परिणामांत काहीं फरक होणार ना-
हीं. आतां क आणि न या दोहोंची परिणामी प्रेरणा (क. २१, २२ प्रमा-
णें) काढावी. तसेंच रव आणि न यांची परिणामी प्रेरणा काढावी.
त्या अ, म आणि ब, प दिशांनी कार्य करतील. अ, म, ब, प रेषा वाढ-
विल्यास ग ठिकाणीं मिळतील. कारण \angle ग अ ब आणि \angle ग ब
अ यांची बेरीज दोन काटकोनाहून कमी आहे. अ, म, ब, प प्रेरणा
अ, ब बिंदूंपासून ग बिंदुस्थळीं प्रेरणा संचरत्वाच्या तत्वाप्रमाणें
न्याव्या. नंतर ग स्थळीं त्यांचे सूक्ष्म प्रेरणांत पृथक्करण करावें; म्हणजे त्यांचे अ-
वयव न, न एकाच रेषेत, पण परस्पर उलट दिशांनी कार्य करतील, आ-
णि परस्पर नाश पावतील, आणि दुसरे अवयव क, रव आणि ग, ड दिशे-
नें कार्य करतील. यास्तव त्यांची परिणामी प्रेरणा क + रव, ग, ड दिशे-
नें कार्य करणारी होईल. ग, ड रेषा अक किंवा ब रवशीं समांतर आ-
हे. यास्तव क आणि रव या एकाच दिशेकडे कार्य करणाऱ्या प्रेरणांची
परिणामी प्रेरणा क + रव म्हणजे त्यांच्या वेरजेबरोबर असून त्याशीं
समांतर अशा दिशेनें कार्य करणारी असते.

ही परिणामी प्रेरणा अब रेषेत कोणत्या स्थळीं कार्य करीलतें
पाहूं.

अ, ड ग त्रिकोणाच्या बाजू क, न, म, या तीन प्रेरणांच्या दि-

(७४)

(७०) यावरून असें स्पष्ट झालें कीं, दोन समांतर भ्रमणांची परिणामी भ्रमणा मूळ भ्रमणांशीं समांतर असते. जेव्हां मूळ भ्रमणा एकाच दिशेकडे कार्य करणाऱ्या असतात, तेव्हां परिणामी भ्रमणा त्यांच्या बरोबरी बरोबर असते व तिची कार्य करण्याची दिशा दोहोंमध्ये असते. आणि जेव्हां भ्रमणा परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करितात, तेव्हां त्यांच्या वजाबाकी बरोबर त्यांची परिणामी भ्रमणा असते व तिची दिशा थोरल्या भ्रमणेच्या बाहेर व तिच्या दिशेशीं तुल्य असते.

आणखीं हेही लक्षांत ठेविलें पाहिजे कीं, क, रव सजातीय किंवा विजातीय भ्रमणांच्या परिणामी भ्रमणेचा कार्य करण्याचा ड बिंदु कायम असतो. म्हणजे क, रव समांतर भ्रमणांच्या दिशा अ, ब बिंदू भोवतीं कशाही फिरविल्या तरी वरील सर्व कृति तशीच राहून तोच ड बिंदू येतो. म्हणून हा बिंदु समांतर भ्रमणांच्या दिशांवर अगदीं अवलंबून नसतो. तो केवळ त्यांच्या परिमाणावर अवलंबून असतो. यास्तव यास क, रव समांतर भ्रमणांचा मध्य असें म्हणतात.

जेव्हां उलट दिशांनीं कार्य करणाऱ्या समांतर भ्रमणा समान असतात, तेव्हां वरील रचना अशक्य आहे. कारण अम आणि बप या परिणामी भ्रमणांच्या दिशा समांतर होतील आणि त्या एका बिंदूंत मिळणार नाहीत. अशा दोन भ्रमणांस जुळें किंवा युग्म असें म्हणतात. याविषयीं पुढें स्वतंत्र विचार केला आहे.

(७१) अनेक समांतर भ्रमणांची परिणामी भ्रमणा काढावे.

क_१, क_२, क_३, क_४ इत्यादि अनेक समांतर भ्रमणा एकाच दिशेकडे कार्य करणाऱ्या असतील; आणि क_१ आणि क_२ यांची परिणामी भ्रमणा प_१ असेल तर—

$$प_१ = क_१ + क_२.$$

(७७)

प_२ ही प_१ आणि क_३ यांची परिणामी भ्रंशणा असेल तर-

$$प_२ = प_१ + क_३.$$

$$= क_१ + क_२ + क_३.$$

$$\text{जर } प_३ = प_२ + क_४ = क_१ + क_२ + क_३ + क_४.$$

या प्रमाणे कितीही भ्रंशणा असल्या, तरी याच प्रमाणे त्यांची परिणामी भ्रंशणा सर्वांच्या भ्रंशणबरोबर होईल, म्हणजे जर क_१, क_२, क_३ इत्यादि नभ्रंशणाचीप परिणामी भ्रंशणा असेल तर-

$$प = क_१ + क_२ + क_३ + क_४ \dots \dots \dots क_n$$

(७२) जर काहीं समांतर भ्रंशणा एका दिशेस कार्य करित असतील आणि काहीं त्यांच्या उलट दिशेने कार्य करित असतील, तर त्यांची परिणामी भ्रंशणा काढणे.

समजा कीं, क_१, क_२, क_३, क_४ इत्यादि समांतर भ्रंशणा एका दिशेस आणि रव_१, रव_२, रव_३ इत्यादि समांतर भ्रंशणा उलट दिशेस कार्य करित असतील, तर समजा कीं पहिल्यांची परिणामी भ्रंशणा क्ष आणि दुसऱ्यांची च असतील तर.

$$क्ष = क_१ + क_२ + क_३ \dots$$

$$च = रव_१ + रव_२ + रव_३ \dots$$

क्ष आणि च या परस्पर समांतर, परंतु उलट दिशांनी कार्य करितात. यास्तव क्ष भ्रंशणा चपेक्षा मोठी असेल तर त्यांची परिणामी भ्रंशणा.

$$प = क्ष - च = (क_१ + क_२ + क_३ \dots) - (रव_१ + रव_२ + रव_३ \dots)$$

ही परिणामी भ्रंशणा कोणत्या विंदुस्थळी कार्य करिते हे कसे काढावे हे पुढे सांगितले आहे.

(७३) एका दिलेल्या प भ्रंशणेचे तिच्या दोहों बाजूंस दिलेल्या अंतरावर कार्य करणाऱ्या अशा दोन भ्रंशणांत पृथक्करण करणे. दिलेलीं अंतरां अ व आहेत; ज्या भ्रंशणा काढणे आहेत त्या क्ष आणि

(७६)

णि य घेऊन त्यांच्या किमती काढू.

(क. ४९) प = क्ष + य.

$$\frac{अ}{ब} = \frac{य}{क्ष}$$

अक्ष = बय.

$$पब = बक्ष + बय = बक्ष + अक्ष.$$

$$\therefore क्ष = \frac{पब}{अ+ब}, \quad य = \frac{पअ}{अ+ब}$$

यासब दोहोंपैकी एक प्रेरणा काढण्यास दिलेल्या प्रेरणेस दुसऱ्या प्रेरणेच्या अंतराने गुणून त्यास दोहोंच्या अंतराच्या बेरजेने भागावे.

(७७) दिलेल्या प्रेरणेचे, तिच्या एकाच बाजूस दिलेल्या अंतरांवर कार्य करणाऱ्या प्रेरणांत पृथक्करण करणे.

दिलेली अंतरे अ, ब आहेत त्यांपैकी अ मोठे अंतर आहे. ज्या दोन प्रेरणा काढणे आहेत त्या क्ष आणि य घेऊ. ज्यापेक्षा या दोन्ही पच्या एकाच बाजूस कार्य करणाऱ्या आहेत, त्या पेक्षां (क. ४९ [२] प्रमाणे) या उलट दिशांनी कार्य करणाऱ्या असल्या पाहिजेत, आणि थोड्या अंतरावर कार्य करणारी प्रेरणा य ही पच्याच दिशेने कार्य करणारी असली पाहिजे.

(क. ४९) य - क्ष = प.

$$\frac{अ}{ब} = \frac{य}{क्ष}$$

अक्ष = बय.

$$\therefore क्ष = \frac{पब}{अ-ब}; \quad य = \frac{पअ}{अ-ब}$$

यासब दोहोंपैकी एक प्रेरणा काढण्यास दिलेल्या प्रेरणेस

प_१ + प_२ न बिंदुस्थळीं कार्य करील. आतां न घ सांध आणि न घरे घेचे लु स्थळीं असे विभाग करकीं, नलु : लघु : : प_१ : प_२ + प_३ + प_४. म्हणजे न ठिकाणची प_१ + प_२ + प_३ मेरणा आणि घ ठिकाणची प_४ मेरणा यांची परिणामी मेरणा प_१ + प_२ + प_३ + प_४ ही लु ठिकाणीं कार्य करील.

यावरून जर चारच मेरणा असतील तर त्यांची परिणामी मेरणा लु स्थळीं कार्य करील. म्हणून क, र, व, ग, घ ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या प_१, प_२, प_३, प_४ या मेरणांचा लु हा मध्य झाला. म्हणून या चार मेरणांनीं चार ठिकाणीं कार्य केले किंवा त्यांच्या परिणामी मेरणेनें एका लु, ठिकाणीं कार्य केले तरी परिणाम एकच होणार आहे.

जर चौहोंहून जास्त मेरणा असल्या तरी वर सांगितल्या प्रमाणें कृति करित गेले म्हणजे त्या सर्वांचा मध्य कादितां येईल.

प_१, प_२, प_३, प_४ इत्यादि मेरणांच्या ज्या आतां दिशा आहेत त्याहून अन्य दिशा असल्या तरी जों पर्यंत त्या सर्व परस्पर समांतर आहेत तों पर्यंत सर्वकृति वरच्या प्रमाणें कायम राहून तोंच मध्य निघेल.

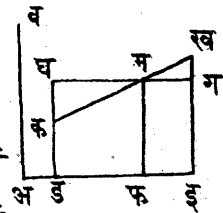
जर पदार्थ वांकडा फिरविला तर टिंबांच्या रेषांनीं त्या मेरणा कार्य करतील. पदार्थास नव्या स्थितींत ठेविल्यानें मेरणांच्या दिशा मात्र बदलल्या. यास्तव वर सांगितल्या प्रमाणें जों पर्यंत त्यांची परिमाणें कायम आहेत, तों पर्यंत वरील कृतीच लागू पडेल, व मध्य कायम राहील; यास्तव जर प_१, प_२, प_३, प_४ या समांतर मेरणा क, र, व, ग, घ या बिंदुस्थळीं दृढ पदार्थावर कार्य करित असतील तर पदार्थास कोणत्याही स्थितींत ठेविले, किंवा मेरणांच्या कार्य करण्याच्या दिशा कशाही असल्या तरी त्यांची परिमाणें व कार्य दृशिक बिंदू कायम आहेत तों पर्यंत त्यांचा मध्य लुच असेल. जर समांतर मेरणांपैकीं काहीं उलट दिशांनीं कार्य करित असतील तर विजातीय मेरणांच्या परिणामी मेरणांचे कार्य करण्याचे मज्ज बिंदू त्यांची स्थळे बदलतील, याकी कृति सर्व अशीच

असेल, परंतु कांहीं एका दिशेने व कांहीं उलट दिशेने कार्य करणाऱ्या अनेक समांतर प्रेरणा असतील, तर त्यांचे दोन गण करावे, आणि प्रत्येक गणाचा, मध्य व त्यांची परिणामी प्रेरणा काढावी. जर एका गणाची परिणामी प्रेरणा दुसऱ्याच्या परिणामी प्रेरणेबरोबर असेल आणि दोहोंचे मध्य एकाच बिंदुस्थळी येतील, तर त्या सर्व प्रेरणा समतोल असतील, जर परिणामी प्रेरणा बरोबर असतील आणि मध्य भिन्नभिन्न ठिकाणी असतील आणि त्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा प्रेरणा युग्म होईल; जर परिणामी प्रेरणा बरोबर नसतील, तर त्या दोहोंची परिणामी प्रेरणा व मध्य काढावा. तो सर्व प्रेरणांचा मध्य होईल.

(७६) वर सांगितल्या प्रमाणे भूमितीने कृति करून अनेक प्रेरणांचा मध्य कासा काढावा हें सांगितलें. परंतु प्रत्येक वेळीं इतकी कृति करून मध्य काढणें म्हणजे फार वेळ लागेल. याकरितां प्रेरणांची परिमाणे व त्यांचें कार्य करणाऱ्याचे बिंदु हे दिले, म्हणजे त्यांवरून गणित करून एकदम मध्य काढितां येण्याजोगी सारणी काढूं. कोणत्याही बिंदूचे गम स्थळ समजण्यास परस्पर मिळणाऱ्या अशा दोन रेषांपासून त्यांचीं अंतरे समजलीं पाहिजेत. मग तीं अंतरे लंब मोजलीं किंवा त्या रेषांशीं समांतर मोजलीं तरी चालतील. यास्तव प्रेरणांच्या बिंदूंत कार्य करितात ते बिंदु देणें म्हणजे त्यांची विचक्षित रेषांपासून अंतरे देणें होय.

(७७) दोन समांतर प्रेरणांच्या कार्यदर्शक बिंदूंचीं अंतरे दोन विचक्षित रेषांपासून दिलीं असल्यास त्यांच्या मध्यांचीं त्यांपासून अंतरे काढणें.

प_१ आणि प_२ या दोन समांतर प्रेरणा क व रव या बिंदुस्थळी कार्य करित आहेत; क, रव या बिंदूंचीं अभ रेषांपासून अ, ब हीं समांतर अशीं त_१, त_२ अंतरे दिलीं आहेत. तर त्यांच्या मध्यांचे अभ रेषांपासून अ, ब हीं समांतर अंतर काढणें आहे. असें स-



(८०)

मज्जूं कीं, प_१ आणि प_२ यांची परिणामी भेरणा प_१ + प_२, क, रव, बिं-
दूस सांधणाच्या रेषेत म ठिकाणी कार्य करिते तर-

$$\frac{प_१}{प_२} = \frac{रवम}{कम}$$

आतांम चें अतर अ भ, पासून काढणें आहे. क, रव आणि म
पासून अ ब शीं समांतर अशा रेषा काढ. त्या अ भ, रेषेस ड, इ, फ स्थ-
ळीं मिळतात. म बिंदूतून अ, भ शीं समांतर रेषा काढ. ती कड आणि
रव ई, यांस घ आणि ग या स्थळीं मिळते.

कड = त_१, रव ई = त_२ तर मफ = क्ष काढणें. क-
घम आणि रवगम, हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत.

$$\therefore \frac{रवम}{कम} = \frac{रवग}{कघ} \quad (\text{यु.सु. ६ सि. ४})$$

$$\therefore \frac{प_१}{प_२} = \frac{रवम}{कम} = \frac{रवग}{कघ} = \frac{रवई - गई}{घड - कड}$$

$$घड = मफ = गइ = क्ष.$$

$$\therefore \frac{प_१}{प_२} = \frac{त_२ - क्ष}{क्ष - त_१}$$

$$प_१ (क्ष - त_१) = प_२ (त_२ - क्ष)$$

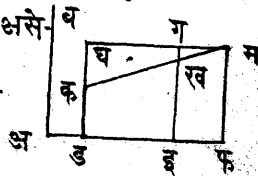
$$(प_१ + प_२) क्ष = प_१ त_१ + प_२ त_२$$

$$क्ष = \frac{प_१ त_१ + प_२ त_२}{प_१ + प_२}$$

आतां जर प_१, प_२ भेरणा विरुद्ध दिशांनीं क, रव, बिंदुस्थळीं कार्यक-
रीत असतील. आणि रव ठिकाणची प_२ मोठी असे-

ल, तर त्यांचा मध्य क रव च्या बाहेर पडेल.

वर सांगितल्या प्रमाणें सर्व कृति करावी.



(८१)

$$\frac{प_१ \quad रवम \quad रवग \quad गइ-रवइ}{प_२ \quad कम \quad कघ \quad घड-कड} = \frac{क्ष-त_२}{क्ष-त_१}$$

$$\therefore प_१ (क्ष-त_१) = प_२ (क्ष-त_२)$$

$$\therefore प_२ त_२ - प_१ त_१ = क्ष (प_२ - प_१)$$

$$\therefore क्ष = \frac{प_२ त_२ - प_१ त_१}{प_२ - प_१}$$

दोन प्रेरणा विरुद्ध दिशांनी कार्य करीत असल्या म्हणजे एकीस 'धन' तर दुसरीस 'ऋण' म्हणतात. जी मोजी असेल ती धन आणि लहान ऋण धरितात. यास्तव पहिल्या सारणीत $प_१$ याच्या ठिकाणी $प_१$ ही किंमत लिहिली, तरी ही सारणी घेते. यास्तव प्रथम काढलेलीच सारणी कायमची समजून पाठ करावी.

जर क, रव, बिंदूची अब रेषेपासून अभ शीं समांतर अंतरें $थ_१, थ_२$ दिलीं असलीं, आणि म मध्याचें तिजपासून अंतर $य$ काढणें असल्यास सर्व कृति अशीच होईल. आणि $य$ ची किंमत अशी निघेल.

$$य = \frac{प_१ थ_१ + प_२ थ_२}{प_१ + प_२}$$

या प्रमाणें म बिंदूचीं दोहों रेषांपासूनचीं अंतरें समजतात, व त्यांवरून एकदम त्याचें ठाम स्थळ कळतें. जर अब, अभ, रेषा परस्पर लंब असतील तर अंतरे लंब असतील. जेव्हां एकाच रेषेपासून मोघम अंतर दिलें असेल तेव्हां ते लंब असें समजावें

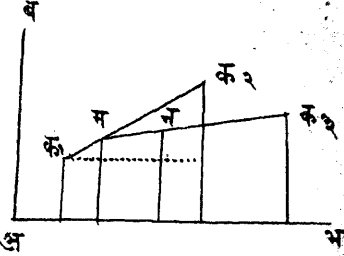
(५६) अनेक प्रेरणांच्या कार्य करणाऱ्याच्या बिंदूचीं विवक्षित रेषांपासून अंतरे दिलीं असल्यास त्यांच्या मध्याचीं त्यांपासूनचीं अंतरे काढणें.

समजा कीं, $प_१, प_२, प_३, प_४$ इत्यादि अनेक प्रेरणा क, क, क, क इत्यादि बिंदुस्थळीं कार्य करीत आहेत. त्यांचीं अभ रेषेपासून अबशीं समांतर अंतरे $त_१, त_२, त_३, त_४$ इत्यादि दिलीं

(८२)

आहेत. अख, अभ रेषा आणि k_1, k_2 इत्यादि बिंदु एकाच पातळीत आहेत.

वरील कलमा प्रमाणे k_1, k_2 सांधून p_1 व p_2 यांच्या म मध्याचे δ_1 अंतर काढ.



$$\delta_1 = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2}{p_1 + p_2}$$

आतां म k_2 सांध, आणि म ठिकाणच्या $p_1 + p_2$ आणि k_2 ठिकाणच्या p_2 या दोन भेराणांच्या म मध्याचे अंतर δ_2 काढ. ते असें होईल.

$$\delta_2 = \frac{(p_1 + p_2) \delta_1 + p_2 t_2}{p_1 + p_2 + p_2}$$

यांत δ_1 याची वरील किंमत लिहून.

$$\delta_2 = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_2 t_2}{p_1 + p_2 + p_2}$$

आतां न k_3 सांधून न ठिकाणच्या $p_1 + p_2 + p_2$ आणि k_3 ठिकाणच्या p_2 या दोन भेराणांच्या ल मध्याचे δ_3 अंतर काढ. ते असें होईल.

$$\delta_3 = \frac{(p_1 + p_2 + p_2) \delta_2 + p_2 t_2}{p_1 + p_2 + p_2 + p_2}$$

यांत वरील δ_2 ची किंमत लिहून.

$$\delta_3 = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_2 t_2 + p_2 t_2}{p_1 + p_2 + p_2 + p_2}$$

या प्रमाणे चार समांतर भेराणांच्या मध्याचे अंभ पासूनचे अंतर निघाले, अशा अनेक भेराणा असल्या तरी सारणी अशीच

येईल. यास्तव साधारण सारणी अशी होईल.

$$\text{क्ष} = \frac{प_१ त_१ + प_२ त_२ + प_३ त_३ + प_४ त_४ + प_५ त_५ \dots प_न त_न}{प_१ + प_२ + प_३ + प_४ + प_५ \dots प_न}$$

याच प्रमाणें अ ब, पासूनचीं अंतरें थ, थ, थ, थ इत्यादि असतील तर मध्याचें तिजपासून अंतर असें होईल.

$$\text{क्ष} = \frac{प_१ थ_१ + प_२ थ_२ + प_३ थ_३ + प_४ थ_४ \dots प_न थ_न}{प_१ + प_२ + प_३ + प_४ \dots प_न}$$

उदाहरणें

(१) २० शेर आणि ३० शेर जोराच्या दोन समांतर भेरेणा एकत्र दिशेनें दृढपदार्थावर कार्य करीत आहे. त्यांच्या कार्य करण्याच्या दोहों बिंदूं मधील अंतर ७ इंच आहे. तर त्याची परिणामी भेरेणा भेरेणावतिच्या कार्य करण्याच्या बिंदूचें पहिल्या भेरेणेच्या बिंदूपासून अंतर काढ?

उ: ५० शेर, अंतर ३ इंच.

(२) ३ शेर व पांचशेर जोराच्या समांतर भेरेणा परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करीत आहेत. त्यांच्या कार्य करण्याच्या बिंदूं मधील अंतर १२ इंच आहे. तर त्यांची परिणामी भेरेणा व तिच्या कार्य करण्याच्या बिंदूचें पहिलीच्या बिंदूपासून अंतर काढ.

उ: २ शेर, अंतर ३० इंच.

(३) अबकड हा चौरस आहे. ३ शेरांची भेरेणा अ पासूनकड, ४ शेरांची ब पासूनकड, ६ शेरांची ड पासूनकड आणि ५ शेरांची अ पासूनकड अशा कार्य करितात. तर त्यांच्या परिणामी भेरेणेचें परिमाण व तिची दिशा काढ.

उ: ९√२ शेर. तिची दिशा अक कर्णाशी समांतर असेल आणि ती अड स अ पासून ३ अड अंतरावर ठेदील.

(८४)

(४) प, २प, ३प, ४प, मेरणा चौरसाच्या बाजूनीं क्रमानें कार्य करितात. तर त्यांची परिणामी मेरणा काढ?

उ. २ प $\sqrt{2}$.

(५) ४ फूट लांबीची तुळी परस्परांमध्ये ३ फूट अंतर आहे. अशा दोन टेंकेंवर क्षितिजाच्या पातळींत तोललेली आहे. एक टेंकू एका शेवटाकडे आहे. तर असें सिद्ध करकीं, तिच्या एका टेंकेंवरचा दाब दुसऱ्या वरील दाबाच्या दुप्पट आहे.

(६) जिची दांडी ४० इंच लांब आहे अशी कावड एक मनुष्य खांद्यावरून नेत आहे. एका पारड्यांत दुसऱ्याच्या ३ वजन आहे. कोणत्या ठिकाणी त्याणें कावड खांद्यावर घेतली पाहिजे. कावडीचें वजन हिशेबांत धरावयाचें नाही.

उ. जड वजनापासून १६ इंचावर.

(७) १, २, ३, ४ शेंरांच्या चार मेरणा एका दांड्यावर सारख्या अंतरावर दांड्याशीं लंब दिशेंत कार्य करीत आहेत. तर त्यांची परिणामी मेरणा काढ?

उ. मेरणा समतोल असतील.

(८) अब हा १५ फूट लांबीचा गुरुत्व शून्य असा दांडा आहे. अपाशीं ४ पौंडांचें वजन दांगिलें आहे. तेथून ३ फुटांवर १ पौंडाचें दांगिलें आहे; आणि ब पासून ८ फुटांवर ११ पौंडांची मेरणा वरच्या बाजूस लंब दिशेंत ओढीत आहे; तर दांडा समतोल राहण्यास आणखी किती व कोठें वजन दांगिलें पाहिजे.

उ. ६ पौंड, बपासून २ फूट ८ इंचांवर.

(९) समांतर भुज चौकोनाच्या दोन कोन बिंदूवर क, र व दोन समांतर मेरणा कार्य करितात, तर दुसऱ्या दोन बिंदूवर याशीं समांतर अशा कोणत्या दोन मेरणांनीं कार्य करावें, म्हणजे चारी मेरणांचा मध्य कर्णाचा छेदन बिंदु होईल.

उ- करव भेरणा.

(१०) समभ्रूज षट्कोनाकृतीच्या कोनविंदुंवर सहा साररव्या समांतर भेरणा कार्य करितात. त्यांची परिणामी भेरणा काढः

उ. षट्कोनाकृतीच्या मध्यापासून बाजूच्या हे अंतरावर.

(११) वर्तुळाच्या परीघाचे न साररवे भाग केले आहेत. एकाशिवाय करून बाकी विभागणाऱ्या विंदुंवर साररव्या समांतर भेरणा कार्य करितात. तर त्यांचा मध्य काढ.

उ. मध्य विंदूपासून त्रिज्येच्या $\frac{1}{2}$ अंतरावर

(१२) प,फ,भ या समांतर भेरणा अत्रक त्रिकोणाच्या कोनविंदुंवर कार्य करितात. तर बाजूंच्या मध्यावर कोणत्या भेरणांनी कार्य करावे म्हणजे दोहों जोडांचें मध्य व परिणामी भेरणा एकच होतील.

(१३) जर प,फ,भ ह्या समांतर भेरणा अत्रक त्रिकोणाच्या कोनविंदुंवर कार्य करतील आणि त्यांचा न हा मध्य असेल तर असे सिद्ध करकीं,

प
फ
भ

Δ बन कचे क्षेत्र. Δ कनअचे क्षेत्र Δ अनब.

प्रकरण ५

भ्रामकत्व.

ज्या प्रेरणा पदार्थास सरळ रेषेंत एका बिंदूपासून प्रत्यक्ष ओढितात किंवा ओढण्याचा त्यांचा कळ असतो त्यांविषयीं विवेचन केले. आतां ज्या प्रेरणांच्या आंगीं एका स्थिरबिंदू सभोंवतीं गति देण्याचा म्हणजे भ्रमण उत्पन्न करण्याचा कळ असतो त्यांविषयीं विचार करूं.

एकाद्या पदार्थाचे एका स्थिरबिंदूभोंवतीं भ्रमण करविण्याची जी प्रेरणेच्या आंगीं शक्ति असते, तिळा त्या प्रेरणेचें त्याबिंदूसंबंधीं भ्रामकत्व असें म्हणावें.

जर पदार्थ एका स्थिर बिंदूशीं पक्का जोडलेला असला किंवा तो बिंदु त्या पदार्थांत असला व त्या सभोंवतीं फिरण्याजोगा असला, तर पदार्थ स्थिर बिंदूशीं पक्का जोडलेला असल्यामुळे सरळ रेषेंत ओढणारी प्रेरणा त्यास लाविली तरी तिच्या योगानें तो पदार्थ त्या बिंदु सभोंवतीं मात्र फिरेल. याची उदाहरणें व्यवहारांत अनेक आढळतात. पाणी काढण्याचा रहाट आंसा भोंवतीं गरगरा फिरतो; तेव्हां त्यास सरळ रेषेंत गति देणारीच मूळची प्रेरणा असते. ज्या दांड्यास गति देतो, तो दांडा आंसाशीं जोडला असल्यानें त्यास भ्रामक गति येते. सूत काढण्याचा रहाट, उंसाचा घाणा, तेल्याचा घाणा वगैरे हीं उदाहरणें भ्रामक गतीचीं होत. विवक्षित प्रेरणेचीं ही भ्रामकगति उत्पन्न करण्याची शक्ति दोन गोष्टींवर अवलंबून राहिल. ज्या प्रमाणें स्थिर बिंदूचें अंतर प्रेरणेच्या कार्यदृशिक रेषेपासून जास्त कमी असेल, त्या प्रमाणें जास्त किंवा कमी अवकाशांतून भ्रमण होईल. हे अंतर म्हणजे प्रेरणेच्या कार्यदृशिक रेषेवर स्थि-

र बिंदूपासून काढलेला लंब होय. हा लंब जसा मोठा तसा भ्रमणाव-
काश मोठा होईल. लंब जसा लहान होत जाईल, त्याप्रमाणे क-
मी अवकाशांतून भ्रमण होईल. कमी होत होत जर मेरणेच्या कार्य-
दर्शक रेषेतच स्थिर बिंदु असला, तर भ्रमणास सुळींच अवकाश मिळणा-
र नाही; व पदार्थास भ्रमणकृती न मिळता, सरळ रेषेत मिळेल. तसे-
च ज्या प्रमाणे मेरणा जास्त जोराची असेल, त्या मानाने भ्रमण जास्त
कमी वेगाने घडेल. यास्तव विवक्षित मेरणेचे भ्रामकत्व मेरणा
व तिच्या कार्यदर्शक रेषेवरील लंब या दोहोंवर अवलंबून असते. म्ह-
णून या दोहोंच्या गुणाकारास त्या मेरणेचे विवक्षित बिंदू भोंवता-
लचे भ्रामकत्व असे म्हणतात. वधाच अर्थी भ्रामकत्व यापरिभा-
षिक शब्दाचा पुढे उपयोग केला जाईल. जर क ही विवक्षित मे-
रणा असेल, आणि अ तिचे विव-

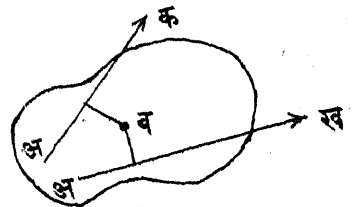
क्षित बिंदूपासून अंतर असेल तर-

कचे त्या बिंदुविषयी भ्राम-

कत्व = क × अ.



(५९) भ्रमण डावीकडून उजवीकडे किंवा उजवीकडून डा-
वीकडे असे दोन रीतींनी होऊ शकेल. यास्तव मेरणेचे याप्रमाणे
भ्रामकत्वही दोन प्रकारचे मानले पाहिजे. उजवीकडून डावीकडे
घड्याळ्याच्या कात्या प्रमाणे भ्रमण घडत असल्यास त्यास धन-
भ्रामकत्व आणि त्याच्या उलट भ्रमण घडत असल्यास त्यास
ऋण भ्रामकत्व असे म्हणावे. उदाहरणार्थ जर क आणि र व
या मेरणांक आणि अ र व या दोन
रेषा दर्शवितील, आणि ब स्थिर बिं-
दु दोहोंच्या मध्ये असेल तर, अंक
मेरणेने व भोंवती घड्याळ्याच्या कां-
त्या प्रमाणे आणि अ र व ने त्याच्याक-



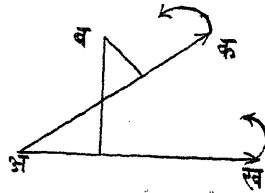
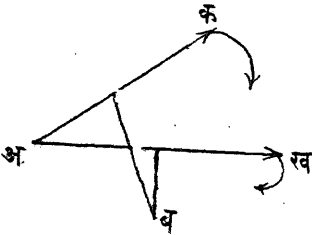
धक्ष
वेच
तिग
वेच

वेण्ण
ताकिं

किंवा
अ-
ठरे
धीसा
आ-
तो,
ज्या
आ-
घा-
ही
ही-
सू-
तू
स्थि

(८८)

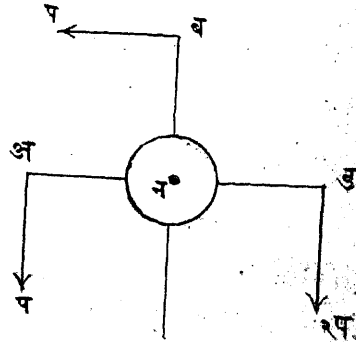
रुढ होईल. ज्या पेक्षां ब बिंदुसभोवती भ्रमण होणें आहे त्या पेक्षां अक नें उजवीकडून डावीकडे आणि अरव नें त्याच्या उलटच भ्रमण झालें पाहिजे. जर अकचें भ्रामकत्व धन धरिलें, तर अरव चें ऋण होईल; परंतु जर ब बिंदु मध्ये नसतां बाहेर असेल तर दोहोंचें भ्रामकत्व एकाच जातीचें होईल. जर ब बिंदु अरव रेषेच्या स्वाळां असेल, तर दोहोंचें भ्रामकत्व धन आणि



जर अकच्या वर ब बिंदु असला, तर दोहोंचें ऋण होईल.

भ्रामकत्वाविषयीं चांगली कल्पना येण्याकरितां आणखीं एक उदाहरण घेऊन स्पष्ट करितों.

मध्यावर फिरत्या अज्ञानचाक्याच्या परिघांत सारख्या लांबीचे कांहीं दांडे गच्च बसविले आहेत. यां पैकीं कोणत्याही दांड्याच्या शेवटास त्याशी लंब दिशेनें कार्यकरणाची प मेरणा लाविली तर चाक्यें भ्रमण सारखेंच होईल.

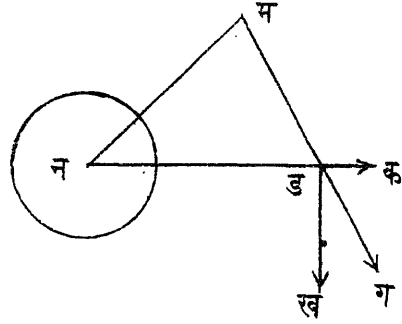


जर अ आणि ब या दोहों दांड्यांस प आणि क या दोन समांतर मेरणा लाविल्या, तर या मेरणांच्या कार्यानें चाक न फिरतां स्थिर राहण्यास दुसऱ्या एका दांड्यास प, मेरणा चाकास डावीकडून उजवीकडे फिरविणारी मेरणा लावावी लागेल.

या वस्तु हें स्पष्ट आहे कीं द या शेवटास लाविलेल्या प मे-

रणेची भ्रामकशक्ति त्याच ठिकाणी त्याच दिशेने कार्य करणाऱ्यापुढे रणेच्या दुपट असेल. म्हणून भ्रामकशक्ति प्रेरणेच्या परिमाणाच्या प्रमाणांत असते हे उघड आहे. तसेच दु दांड्याची लांबी जास्त असेल तर जास्त अवकाशातून भ्रमण होईल. म्हणून कोणत्याही प्रेरणेची भ्रामकशक्ति म्हणजे तिचे भ्रामकत्व प्रेरणेचे परिमाण आणि तिच्या कार्यदृशिक रेषेवर स्थिरबिंदूपासून काढलेला लंब यांवर अवलंबून असते, हे उघड आहे.

जर दु दांड्यास लंब दिशेने कार्य करणारी प्रेरणा न लावितो दु-ग दिशेने कार्य करणारी प्रेरणा लाविली तर तीच लंब दिशेने कार्य करील तर जेवढी तिच्या आंगी भ्रामकशक्ति असेल तेवढी आतां असणार नाही. वास्तविक तिची भ्रामकशक्ति तिच्या कार्यदृशिक रेषेवर न स्थिरबिंदूपासून काढलेला लंब आणि प्रेरणा यांच्या गुणाकारावरोबर आहे. म्हणजे $ग \times नम$ आ-



हे, परंतु ग प्रेरणा जर दु दांड्यासच लाविली असेल तर गचे दांड्याच्या दिशेने व त्याशी लंब अशा डक आणि डरव या प्रेरणांत पृथक्करण करावे. पदार्थ न भोवती मात्र फिरता असल्याने तो डक दिशेने सरणार नाही, आणि डरव नेमात्र न भोवती फिरेल.

$$\text{डरव} = ग \cdot \text{को. भु.} \quad (\text{गडरव})$$

$$\text{डरव} \cdot नड = ग \cdot नड \cdot \text{को. भु.} \quad (\text{गडरव})$$

$$\angle \text{गडरव} = \angle \text{डनम} \therefore नम = नड \cdot \text{को. भु.} \quad (\text{गडरव})$$

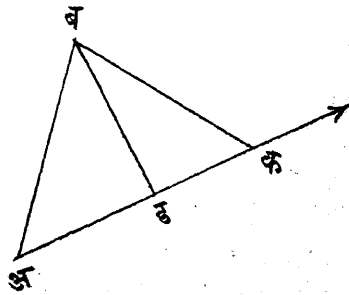
$$ग \times नम = ग \times नड \cdot \text{को. भु.} \quad (\text{गडरव}) = नड \times \text{डरव.}$$

विवक्षित प्रेरणेने पदार्थाचे एका स्थिरबिंदूभोवती भ्रमण हो-

ण्यास तो बिंदु पदार्थात असून त्या सभोवती फिरता असला पाहिजे. किंवा तो बिंदु पदार्थाबाहेर असल्यास मेरणेच्या दिशेची लंब अशा दृढ दांड्याने तो बिंदु पदार्थास जोडलेला असला पाहिजे. जर बिंदु पदार्थ यास जोडणाऱ्या दृढ दांड्याची लंब दिशेने मेरणा कार्य करित नसली तर दांड्याची लंब असा जो पृथग्भूत भाग असेल तेवढ्याने मात्र भ्रमण घडेल. असा जरी वास्तविक प्रकार आहे तरी विवक्षित मेरणेची विवक्षित बिंदुसंबंधी भ्रामकशक्ति काढण्यास तो बिंदुवास्तवीक मेरणेच्या दिशेची लंब अशा दृढ दांड्याने पदार्थाची जोडलेला आहे किंवा नाही याचा विचार न करता स्थिर बिंदुपासून मेरणेच्या कार्यदृशिक रेषेवर लंब काढून त्या लंबाने स्थिर बिंदु पदार्थाची जोडलेला आहे अशी कल्पना करून मेरणेची भ्रामकशक्ति काढतात. म्हणून एखाद्या मेरणेचे एका विवक्षित बिंदुसंबंधी भ्रामकत्व म्हणजे तिची भ्रामकशक्ति केवळ मेरणा आणि तिच्या कार्यदृशिक रेषेवर काढलेला लंब यांच्या गुणाकारावर असे एवढेच घेऊन यंत्रस्थिति शास्त्रातील अनेक सिद्धांत सिद्ध केले आहेत.

(६०) विवक्षित बिंदुसंबंधी विवक्षित मेरणेचे भ्रामकत्व भूमितीने कसे दाखविता येते ते सांगतो.

अक रेखा क मेरणा परिमाणाने व दिशेने दर्शवित आहे. ब हा स्थिर बिंदु आहे. ब पासून अक वर बड लंब काढिला म्हणजे क मेरणेचे ब संबधी भ्रामकत्व अक × बड होईल. आतां ज

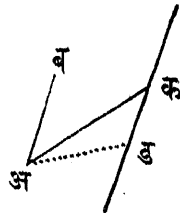


र अब आणि बक सांधिल्यास अबक हा भिकोण होईल. या त्रि-

त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ $\frac{\text{अक} \times \text{बड}}{२}$ आहे. यास्तव याची दुप्पट अक \times बड आहे. म्हणून अ ब क त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या दुपटी बरोबर क प्रेरणेचे ब संबंधीं भ्रामकत्व आहे. या करितां हें स्पष्ट आहे कीं, प्रेरणेचें परिमाण व दिशा दर्शविणारी रेषा ज्याचा पाया आहे व स्थिर बिंदु ज्याचा शिरकोन आहे अशा त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या दुपटी बरोबर त्या प्रेरणेचें त्या बिंदु भोंवतालचें भ्रामकत्व असतें

(६१) प्रेरणा ज्या बिंदुस्थळीं कार्य करित असेल तो बिंदु दिलेल्या स्थिर बिंदूशीं सांधिला आणि प्रेरणा दर्शक रेषेच्या दुसऱ्या टोंकापासून यारेषेचीं समांतर रेषा काढिली आणि इजमध्ये कोणताही बिंदु घेऊन तो प्रेरणा ज्या बिंदूवर कार्य करिते त्या बिंदूशीं सांधिला, तर यारेषेनें जी प्रेरणा दर्शविली जाईल, तिच्या दिलेल्या बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वा बरोबर मूळच्या प्रेरणेचें त्या बिंदु भोंवतालचें भ्रामकत्व असतें.

अक रेषा अ बिंदूवर कार्य करणारी प्रेरणा दर्शविते आणि ब हा दिलेला बिंदु आहे, अ ब सांधून अक रेषेच्या दुसऱ्याक टोंकांतून अ ब शीं एक समांतर रेषा काढिली आणि तींत कोठेंही दु बिंदु घेतला आणि अ, दु सांधिले तर अ, दु रेषेनें दर्शविणाऱ्या प्रेरणेचें ब संबंधीं भ्रामकत्व अक च्या ब संबंधीं भ्रामकत्वा बरोबर असतें कारण अ ब क आणि अ ब ड हे त्रिकोण अक आणि अ ड यांची बिंदुसंबंधीं भ्रामकत्वे दर्शवितात. हे त्रिकोण अ ब या एकाच पायावर आणि अ ब आणि क ड या समांतर रेषांमध्ये आहेत म्हणून (यु. पु. १ सिद्धांत ३५) ते परस्पर बरोबर आहेत.



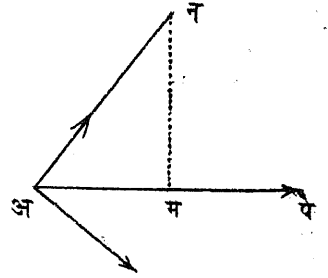
(६२) विवक्षित प्रेरणेचें दिलेल्या बिंदु भोंवतालचें भ्रामकत्व, प्रेरणा ज्या बिंदुस्थळीं कार्य करिते तो बिंदु व दिलेला बिंदु हे हे सांधून त्या रेषेचीं लंब दिशेंत जो दिलेल्या प्रेरणेचा पृथग्भूत भाग त्याच्या भ्रामकत्वा

वरोबर असते.

समजा कीं, प प्रेरणा अ बिंदुस्थळीं अ प दिशेनें कार्य करीत आहे, न हा दिलेला बिंदु आहे. न अ सांध आणि नम, पच्या कार्यदर्शक रेषेवर लंब काढ. म्हणून

प चें भ्रामकत्व = $p \times n \sin \theta$, समजा कीं, $\angle n \sin \theta = \theta$

प प्रेरणेचा अन शीं लंब अशा दिशेनें कार्य करणारा पृथग्भूत भाग $p \times \sin(\theta)$ होईल.



प.भु. (θ) या प्रेरणेच्या कार्य

दर्शकरेषेवरील न बिंदुपासून काढलेला लंब न अ आहे.

\therefore न संबंधीं प.भु. (θ) चें भ्रामकत्व = प.भु. (θ) \times न अ

परंतु न अ. भु. (θ) = नम.

\therefore न संबंधीं प.भु. (θ) चें भ्रामकत्व = $p \times n \sin \theta$

हें उघड आहे कीं, हीं भ्रामकत्वे एकाच जातीचीं म्हणजे एकाच दिशेनें भ्रमण करविणारीं आहेत.

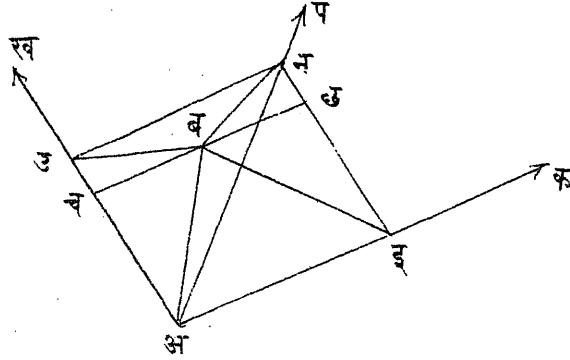
(६,३) एका पातळीत कार्य करणाऱ्या व एका बिंदूत मिळणाऱ्या अशा दोन प्रेरणांच्या एका विवक्षित बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या त्या बिंदु सभोंवतालच्या भ्रामकत्वावरोबर असते.

या सिद्धांताचे दोन प्रकार होतील. (१) स्थिरबिंदु दोहों प्रेरणांच्या मध्यें असेल. (२) किंवा तो दोहोंच्या वाहेर असेल. पहिल्यावेळीं दोहोंचीं भ्रामकत्वे विजातीय होतील; आणि त्यांची बेरीज वस्तुतः त्यांची वजावाकी असेल; दुसऱ्यावेळीं दोहोंचीं भ्रामकत्वे सजातीय असतील.

(१) अ इ, अउ रेषा क, रूव प्रेरणा दर्शवितात अ इ न उ

(१२)

हा समांतर भुज चौकोन काढ आणि अन सांध; म्हणजे क, र व यांची फरिणामी भेरणा प, अन कर्ण दर्शविल. ब बिंदु दोहोंच्या मध्ने फेरुं. अ ब उ, अबई, आणि अ ब न या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या दुपटी अन उ, अई आणि अन यांची भ्रामकत्वे दर्शवितील. अइ व अउ



ची भ्रामकत्वे विजातीय आहेत. म्हणून $2 \Delta अबइ - 2 \Delta अबउ = 2 \Delta अबन$ हे सिद्ध करावयाचे आहे.

ब मधून अइशी समांतर अशी च व छ रेषा काढ.

$$\square इच = \square इउ - \square छउ.$$

$$\square इच = 2 \Delta अबई; \square इउ = 2 \Delta अउन; \square छउ = 2 \Delta उवन.$$

$$\therefore \Delta अबइ = \Delta अउन - \Delta उवन$$

$$\text{परंतु } \Delta अउन = \Delta अबउ + \Delta अबन + \Delta उवन.$$

$$\therefore \Delta अबइ = \Delta अबउ + \Delta अबन.$$

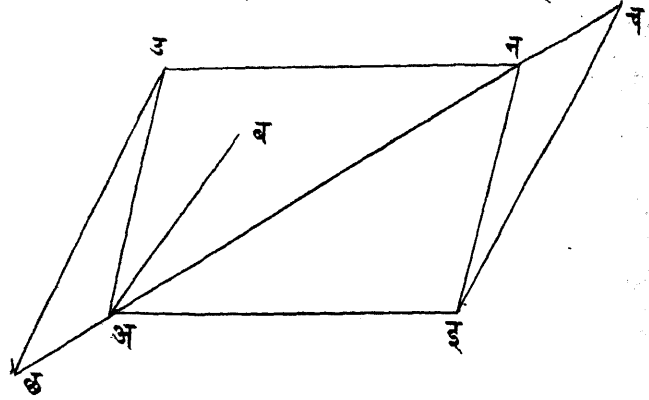
$$\therefore \Delta अबइ - \Delta अबउ = \Delta अबन.$$

या समीकरणास दोहोंनी गुणिले तरी रवरे आहे, म्हणून सिद्धांत सिद्ध झाला.

हाच सिद्धांत कलम (६१) चांत सांगितल्या नियमानेही सिद्ध करिता येतो.

(१४)

ब बिंदु अशीं सांघून अबशीं इ व उ या बिंदूंतून समांत ररेषा काढाव्या. आणि अन तिला च व छ या बिंदूंत उ छ व उ-



च मिळेपर्यंत वाढवावी म्हणजे अइ चें भ्रामकत्व अचच्या भ्रामकत्वा बरोबर असेल. आणि अउचें भ्रामकत्व अछच्या भ्रामकत्वा बरोबर असेल. म्हणून अइ आणि अउ यांच्या भ्रामकत्वाच्या वजाबाकी बरोबर अच आणि अछ यांच्या भ्रामकत्वाची वजाबाकी होईल. नच = अछ, कारण अछ उ आणि इ-नच हे दोन त्रिकोण समान आहेत. अउ = नइ; $\angle छ = \angle च$, $\angle उ अ छ = \angle इ न च$, यास्तव अच - अछ = अन + नच - अइ = अन. यास्तव अइ व अउ यांच्या भ्रामकत्वाच्या वजाबाकी बरोबर अनचें भ्रामकत्व आहे हें सिद्ध झालें.

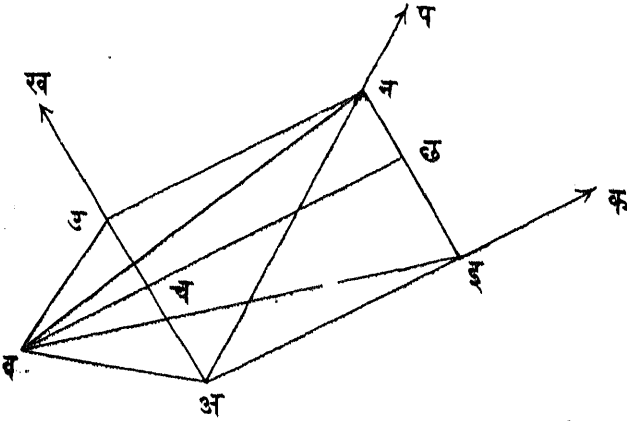
क० ६२ यांन सांगितल्या नियमांनं तर हा सिद्धांत फारच सहज रीतीनं सिद्ध होतों.

क० १० प्रमाणें एका बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या दोन भ्रामकांच्या कोणत्याही दिशेंतील पृथग्भूत भागांच्या बेरजे बरोबर त्यांच्या परिणामी भ्रामकेच्या त्या दिशेंतील पृथग्भूत भाग असतो. म्हणून अशीं लंब दिशेंतील अइ, अउ यांच्या पृथग्भूत भागांबरोबर त्या दिशेंतील अनचा पृथग्भूत भाग असेल.

आतां क. ६२ प्रमाणे अइ, अउ यांची ब संबंधी भ्रामकत्वे त्यांच्या ब अ शी लंब दिशेंतील पृथग्भूत भागांच्या भ्रामकत्वा बरोबर आहेत. यांची ब संबंधी भ्रामकत्वे म्हणजे ब अ × पृथग्भूत भाग आणि हे पृथग्भूत भाग अन च्या पृथग्भूत भागाबरोबर आहेत. म्हणून ब अ × अन चा पृथग्भूत भाग याबरोबर अइ व अउ यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज होईल; परंतु ब अ × अन चा पृथग्भूत भाग = अनचे ब संबंधी भ्रामकत्व आहे. म्हणून सिद्धांत सिद्ध झाला.

अइ व अउ यांचे पृथग्भूत भाग धन व ऋण असतील म्हणून त्यांची भ्रामकत्वे धन व ऋण होतील. त्यांची बेरीज ही त्यांची वजाबाकी असते.

(२) जेव्हां ब बिंदु अइ, अउ यांच्या बाहेर असेल तेव्हां सिद्धांत सिद्ध करू. यावेळीं दोहों घेरणांची भ्रामकत्वे सजातीय असतील.



अइचे भा. + अउचे भा. = अनचे भा. किंवा.

$$२ \triangle अबइ + २ \triangle अबउ = २ \triangle अबन.$$

हें सिद्ध करावयाचें आहे.

ब मधून बचउ, अइशी समांतर काढ.

$$\triangle अबन = चौकोन अबउन - \triangle बउन.$$

(१६)

परंतु चोकोन अकउन = Δ अवउ + Δ अउन.

ही किंमत वरच्या समीकरणांत लिहून व समीकरणास २नी गुणून.

२Δ अवन = २Δ अवउ + २Δ अउन - २Δ वउन.

२Δ अउन = \square उइ.

२ वउन = \square उछ.

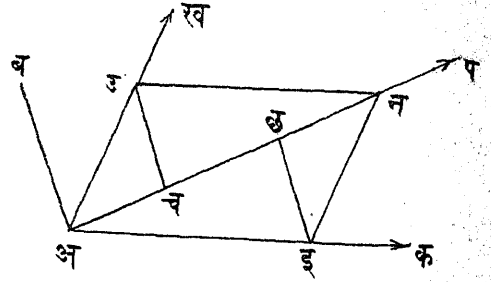
$\therefore २\Delta$ अवन = २Δ अवउ + \square उइ - \square उछ.

परंतु \square उइ - \square उछ = \square चइ = २Δ अवई.

हातर दुसऱ्या रीतीनें फारच सहज सिद्ध होतो.

ब बिंदु अशीं

सांघून अव शीउ वइ
यादुसऱ्या वेंकांतून उ-
चवउछ यासमांत-
र रेषा काढ? त्या स-
मांतर रेषांत च, छ हे
बिंदु घेऊन ते अ शींसां-



धले आहेत म्हणून क. ६.१ प्रमाणें.

अउचें भा. = अचचें भा.

अइचें भा. = अछचें भा.

म्हणून अउ भा. + अइचें भा. = अचचें भा. + अछचें
भा.; Δ अउच = Δ अइन \therefore अच = अइन; अचभा. = अइनभा.
यास्तव.

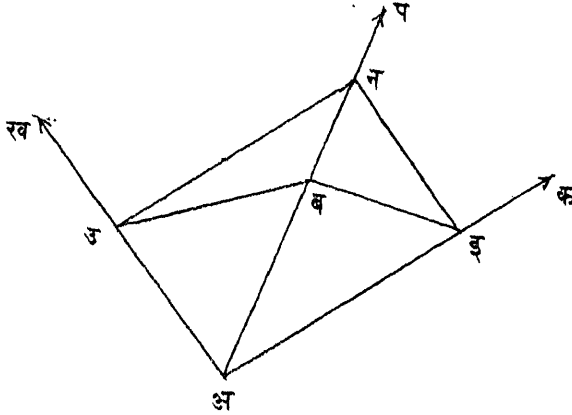
अउ भा. + अइभा. = अइनभा. + अछभा. = अनभा.

टीप- जेव्हां स्थिरबिंदु परिणामी प्रेरणा दशक रेषेंत असेल ते-
व्हां दोहोंच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होईल.

ब बिंदु अन रेषेंत असेल तर दोहोंची भ्रामकत्वे विजाती-
च असतील. यास्तव त्यांची बेरीज शून्य होण्यास दोनही बरोब-

(१७)

र आहेत हें सिद्ध केले पाहिजे.



$$\triangle अउन = \triangle अइन,$$

$$\frac{\triangle अउन}{\triangle अइन} = \frac{\triangle अबउ}{\triangle अबइ} \therefore \triangle अबइ = \triangle अबउ.$$

यांच्या दुप्पट अइ व अउ यांची भ्रामकते आहेत. याकरिता स्थिर बिंदु जर परिणामी भ्रमणेच्या दिशेत घेतला तर, दोहोंची समान व विजातीय भ्रामकते परस्पर समतोल होतील आणि त्यांच्या योगाने त्या बिंदु भोंवती भ्रमण घडणार नाही.

(६४) जर दोन भ्रमणा समांतर असल्या तरी फुडां वरील सिद्धांत स्वरा असतो हें दाखवितो.

समांतर भ्रमणा एकाच दिशास कार्य करतील किंवा परस्परउलट दिशांनी कार्य करतील.

(१) भ्रमणा एकाच दिशास कार्य करित आहेत. आणि बिंदु दोहोंच्या बाहेर आहे असे घेऊं. करव या दोन समांतर भ्रमणा असून त्यांची परिणामी भ्रमणा प आहे व बिंदु दोहों भ्रमणांचा आहे.

व पासून भ्रमणांच्या दिशांतून एक लंब रेषा काढ. आणि

(१८)

ती प्रेरणास अक स्थळीं आणि त्याच्या परिणामी प्रेरणेस दु स्थळीं मिळूंदे. क प्रेरणेचे ब पासून अंतर अव आणि रव चे क आणि प परिणामी प्रेरणेचे ब दु आहे. दोहोंचे भ्रामकत्व सजातीय आहे म्हणून.

$$क \times अव + रव \times बक = प \times बड.$$

हें सिद्ध करावयाचें आहे.

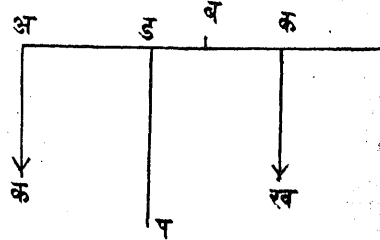
क, रव याची परिणामी प्रेरणा दु मधून जाते.

$$\therefore (क. ४९) क \times अड = रव \times कड$$

$$\begin{aligned} क \times अव + रव \times बड &= क (बड + अड) + रव (बड - कड) \\ &= क \times बड + रव \times बड \\ &= (क + रव) बड \\ &= प (बड) \end{aligned}$$

(२) ब बिंदु दोहोंच्या मध्ये आहे. या वेळीं भ्रामकत्वे विजातीय असतील

$$(क. ४९) क \times अड = रव \times कड$$

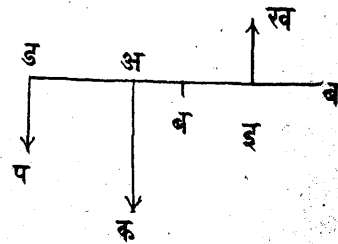


$$\begin{aligned} क \times ब अरव \times बक &= क (बड + अड) - रव (कड - बड) \\ &= (क + रव) बड = प. बड. \end{aligned}$$

(३) प्रेरणा परस्पर उलट दिशेने कार्य करणाऱ्या आहेत. आणि ब बिंदु दोहोंच्या बाहेर आहे.

क, रव याच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा दु बिंदूतून जाते, म्हणून.

$$क \times अड = रव \times इड$$



दोहोंचें भ्रामकत्व विजातीय आहे म्हणून त्याची बेरीजही वास्तविक वजावाकी आहे.

$$\begin{aligned} क \times बअ - रव \cdot बइ &= क(बड - अड) - रव(बड - इड) \\ &= क \times बड - रव \times बड \\ &= (क - रव) बड = प \cdot बड. \end{aligned}$$

(४) जर व बिंदु दोहोंच्या मध्ये असेल तेव्हां दोहोंचें भ्रामकत्व सजातीय होईल.

$$क \times अड = रव \times इड.$$

भ्रामकत्वे सजातीय म्हणून.

$$\begin{aligned} क \cdot बअ + रव \cdot बइ &= क(बड - अड) + रव(इड - बड) \\ &= क \cdot बड - रव \cdot बड \\ &= (क - रव) बड = प \cdot बड. \end{aligned}$$

यास्तव प्रेरणा समांतर असोत अगर नसोत वरील सिद्धांत सर्वत्र रवरा आहे.

टीप- समांतर प्रेरणा असतात तेव्हांही बिंदु परिणामी प्रेरणेच्या दिशेत घेतल्यास दोहों प्रेरणांची भ्रामकत्वे समान आणि विजातीय होऊन त्यांची बेरीज शून्य होते म्हणजे पदार्थ त्या बिंदु भोंवती भ्रमण करणार नाही.

(६५) समांतर असणाऱ्या किंवा नसणाऱ्या अशा अनेक प्रेरणा एका पातळीत कार्य करीत असतील, तेव्हां त्या पातळीतील कोणत्याही बिंदु भोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या त्या बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वाबरोबर होईल.

क_१ क_२ क_३ क_४ इत्यादि अनेक प्रेरणा आहेत. आणि अ_१ अ_२ अ_३ अ_४ इत्यादि विवक्षित बिंदुपासून त्यांच्या दिशांची अंतरे आहेत. आतां जर क_१ आणि क_२ यांची परिणामी प्रेरणा प, असेल आणि तिचे व पासून अंतर इ, असेल, तर प्रेरणा स-

मांतर असल्या किंवा नसल्या तरी,

$$क_१ अ_१ + क_२ अ_२ = प_१ इ_१$$

पुढी प_१ आणि क_२ यांची परिणामी प्रेरणा असली, आणि तिचें ब पासून अंतर इ_२ असलें तर.

$$प_१ इ_१ + क_३ अ_३ = प_२ इ_२$$

$$\text{आणि } \therefore क_१ अ_१ + क_२ अ_२ + क_३ अ_३ = प_२ इ_२.$$

तसेंच जर प_२ आणि क_४ यांची परिणामी प्रेरणा प_३ असली, आणि तिचें ब पासून अंतर इ_३ असलें तर.

$$प_२ इ_२ + क_४ अ_४ = प_३ इ_३$$

$$\therefore क_१ अ_१ + क_२ अ_२ + क_३ अ_३ + क_४ अ_४ = प_३ इ_३.$$

या प्रमाणें कितीही प्रेरणा असल्या, आणि त्यांची परिणामी प्रेरणा प आणि तिचें ब बिंदुपासून अंतर इ असेल तर.

$$क_१ अ_१ + क_२ अ_२ + क_३ अ_३ + क_४ अ_४ \dots \dots = प इ.$$

टीप १- जर ब बिंदु परिणामी प्रेरणेच्या कार्यदृशिक रेषेत असला, तर इ = ०. आणि क_१ अ_१ + क_२ अ_२ + क_३ अ_३ \dots = ० यास्तव जर परस्पर संमांतर किंवा मिळणाऱ्या अशा अनेक प्रेरणा एका पातळीत कार्य करित असतील तर त्यांच्या परिणामी प्रेरणेंतील कोणत्याही बिंदु भोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होईल, आणि त्या बिंदु भोंवती त्यांच्या योगानें भ्रमण घडणार नाही.

टीप २- जर प्रेरणा समतोल असतील, तर प = ० असेल आणि क_१ अ_१ + क_२ अ_२ + क_३ अ_३ \dots = ० होईल यास्तव जेव्हां अनेक प्रेरणा एका पातळीत कार्य करित असून समतोल असतील, तेव्हां त्या पातळीतील कोणत्याही बिंदु भोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होईल. म्हणजे समतोल प्रेरणांच्या योगानें त्यांच्या पातळीतील कोणत्याही बिंदु भोंवती भ्रमण घडणार नाही.

टीप ३- जर अनेक प्रेरणा पदार्थावर एका पातळीत कार्य करित

असतील तर त्या समतोल असतील किंवा त्यांच्या बरोबरीची एक परिणा-
मी प्रेरणा असू शकेल. जर प्रेरणा समतोल असल्या तर त्यांच्या पातळीती-
ल कोणत्याही बिंदु भोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज सर्वदा शून्य
असते. आणि समतोल नसतील. तेव्हा फक्त परिणामी प्रेरणा दृष्टी-
क रेषेतील बिंदु भोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होते.
म्हणून केवळ प्रेरणांच्या एका बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज
शून्य असली म्हणजे त्या सर्वदा समतोल असू शकत नाहीत. अशा
कोणत्याही तीन बिंदु सभोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज जर शून्य
असेल तर मात्र त्या प्रेरणा समतोल असतील. कारण अ, ब, क या
तीन बिंदु भोंवतालचीं भ्रामकत्वे शून्य असलीं, आणि ते एका रेषेत न-
सले, तर जर त्या प्रेरणांस परिणामी प्रेरणा असली तर अ, क आणि
अ, ब या दोहों रेषेत ती कार्य करील असें होईल. परंतु ही गोष्ट अ-
शक्य आहे. परिणामी प्रेरणा फारतर एका रेषेत कार्य करील. यास्त-
व यांस परिणामी प्रेरणा नसून त्या समतोलच असतील. यास्तव जर
एका रेषेत नसणाऱ्या अशा कोणत्याही प्रेरणांच्या पातळीतील तीन बिंदु
भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असेल, तर त्या समतोल अ-
सतील.

(६६.) जर सर्व प्रेरणा एका बिंदूत कार्य करीत असतील, त-
र अनेक प्रेरणांच्या भ्रामकत्वाची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या भ्रा-
मकत्वा बरोबर असते हें क. ६२ प्रमाणें सूत्रभरीतीने सिद्ध करितां ये-
ते.

समजाकीं, अ, बिंदुस्थळीं प्रेरणा कार्य करीत आहेत. आणि ब
हा स्थिर बिंदु आहे.

ब संबंधीं दिलेल्या प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज

= ब अशी लंब दिशेतील त्यांच्या पृथग्भूत भागांच्या भ्रामक-
त्वाची बेरीज.

(१०२)

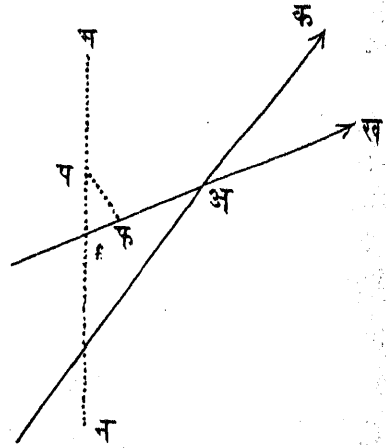
= $b \times a$ ह्या पृथग्भूत भागांची बेरीज.

= $b \times a$ ह्या दिशेंतील परिणामी मेरणेचा पृथग्भूत भाग.

= b संबंधीं परिणामी मेरणेचें भ्रामकत्व.

(६७) मेरणेचें सरळ रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व— विवक्षित मेरणेचें दिलेल्या रेषेशीं लंब आणि समांतर अशा दिशांनीं कार्य करणाऱ्या मेरणांमध्ये पृथक्करण केले तर दिलेल्या रेषेशीं लंब दिशेंत कार्य करणाऱ्या पृथग्भूत भाग आणि याची कार्य करण्याची दिशा आणि दिलेली रेषा यांमधील अंतर यांच्या गुणाकारास मूळ मेरणेचें दिलेल्या रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व असें म्हणतात. जर रेषेसमोवती पदार्थाचें भ्रमण उजवीकडून डावीकडे घडले व त्या भ्रामकत्वास धन नांव दिलें तर उलट दिशेंत भ्रमण घडल्यास तें भ्रामकत्व ऋण होईल.

क मेरणा पदार्थावर अ ठिकाणीं अक दिशेंत कार्य करित आहे. नम ही दिलेली रेषा आहे.



नम रेषेशीं लंब अशीं अ बिंदूतून जाणारी पातळी नम रेषेस प बिंदुस्थळीं छेदिते. न मशीं लंब दिशेंत कार्य करणाऱ्या कचा पृथग्भूत भाग रव आहे.

हे असें समजूं. तर रवची कार्य करण्याची दिशा नम शीं लंब अशा प पातळींत असेल. तिजवर प पासून पफ लंब काढ. तर पफ हे नम रेषा आणि रवची दिशा यांमधील अंतर आहे.

∴ नम रेषेसंबंधीं क मेरणेचें भ्रामकत्व.

= $r \times p$

= r चें प संबंधीं भ्रामकत्व.

यास्तव विवक्षित रेषेसंबंधीं विवक्षित मेरणेचें भ्रामकत्व, दिलेल्या रेषेशीं लंब दिशेंत जो मेरणेचा पृथग्भूत भाग त्यामधून जाणारी पातळी ज्या बिंदूंत दिलेल्या रेषेस मिळेल त्या बिंदुस भोंवतालच्या या पृथग्भूत भागाच्या भ्रामकत्वा बरोबर असते हें उघड आहे.

जर मेरणेची दिशा दिलेल्या रेषेशीं समांतर असेल, तर तिचा दिलेल्या रेषेशीं लंब दिशेंत पृथग्भूत भाग असणार नाही. म्हणून अशा मेरणेचें दिलेल्या रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व शून्य होईल. जर मेरणा दिलेल्या रेषेशीं लंब असेल तर तिचें दिलेल्या रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व मेरणा व तिचें दिलेल्या रेषेपासून अंतर यांच्या गुणाकारा बरोबर होईल.

(६८) पदाथर्विर एका बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या अनेक मेरणांच्या एका सरळ रेषेसंबंधीं भ्रामकत्वांची बेरीज त्यांच्या परिणामी मेरणेच्या त्या रेषेसंबंधीं भ्रामकत्वा बरोबर असते.

जर अणु बिंदुस्थळीं अनेक मेरणा कार्य करित असतील. आणि नम ही दिलेली रेषा असेल, व अणुमधून जाणारी नम ही लंब पातळी नम रेषेस प बिंदूंत छेदीत असेल, तर प्रत्येक मेरणेचें नम रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व नम ही लंब दिशेंत कार्य करणाऱ्या तिच्या पृथग्भूत भागाच्या प भोंवतालच्या भ्रामकत्वा बरोबर असेल. याकरितां सर्व मेरणांच्या नमसंबंधीं भ्रामकत्वांची बेरीज नम ही लंब दिशेंत कार्य करणाऱ्या त्यांच्या पृथग्भूत भागांच्या प भोंवतालच्या भ्रामकत्वांच्या बेरीजे बरोबर असेल; म्हणजे त्यांच्या परिणामी मेरणेच्या प भोंवतालच्या भ्रामकत्वा बरोबर असेल, परंतु मूळ मेरणांच्या परिणामी मेरणेचा नम ही लंब दिशेंत कार्य करणारा पृथग्भूत भाग, मेरणांच्या या दिशेंत कार्य करणाऱ्या पृथग्भूत भागांच्या परिणामी मेरणे बरोबर असेल. याकरितां सर्व मेरणांच्या नमसंबंधीं भ्रामकत्वांची बेरीज त्यांच्या परिणामी मेरणेच्या नमसंबंधीं भ्रामकत्वा बरोबर आहे हें सिद्ध झाले.

जर मेरणा समतोल असतील तर त्यांची परिणामी मेरणा शून्य

न्य होईल. आणि तिचें भ्रामकत्वही शून्य होईल. म्हणून समतोल प्रेरणांच्या कोणत्याही रेषे भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असेल.

पातळी संबंधीं प्रेरणेचें भ्रामकत्व— विवक्षित पातळी संबंधीं प्रेरणेचें भ्रामकत्व प्रेरणा आणि तिच्या कार्यकरणाच्या बिंदूपासून पातळीचें अंतर यांच्या गुणाकाराबरोबर असतें. या विषयीं ही वरील सिद्धांत सिद्ध करितां येतो.

उदाहरणें.

(१) क, रघ हे दोन बिंदु वर्तुळाच्या परिधावर आहेत. क च्या दोहों बाजूं सरवअ आणि रवब या दोन ज्या परस्पर लंब अशा असतील, आणि त्या दोन प्रेरणा दृशीवितिल, तर त्यांच्या क संबंधीं भ्रामकत्वां मधील अंतर सर्वदां सारखें असेल.

(२) जर दोन किंवा अधिक प्रेरणा एका बिंदुस्थळीं कार्य करित असतील, तर त्या पातळींतील कोणत्याही सरळ रेषेचीं समांतर सरणान्या बिंदुसंबंधीं त्यांच्या भ्रामकत्वांची साधी बेरीज सारखी राहिल.

(३) पातळींत एकास्थळीं कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणांच्या दोन बिंदुसंबंधीं भ्रामकत्वांची बेरीज समान असेल, तर त्यांस सांघणारी रेषा प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेच्या दिशेचीं समांतर होईल.

(४) अबक त्रिकोणाच्या अ, ब, क कोनांसमोरील बाजूंचे मध्य ड, इ, फ आहेत, तर अड, बइ आणि कफ चारेषांनीं दृशी विषान्या प्रेरणा समतोल असतील.

(५) त्रिकोणाच्या कोन बिंदूवर कोन बिंदूंपासून समोरच्या बाजूंवर जे लंब त्या रेषांत तीन प्रेरणा कार्य करितात व त्या त्रिकोणास सम-

(१०५.)

ताळ ठेवितात. तर दोन कोनबिंदु सभोंवताळचीं भ्रामकत्वे घेऊन असें सिद्ध करकीं, प्रत्येक मेरणा ज्या बाजूशीं लंब दिशेंत कार्य करिते तिशीं म-
माणांत आहे.

(६) त्रिकोणाच्या कोनास दुभागणाऱ्या रेषांत प, फ, भ या मेरणा
त्रिकोणाच्या अ, ब, क कोन बिंदूंवर कार्य करितात. व त्रिकोणास स-
मतोल ठेवितात. तर असें सिद्ध करकीं—

$$प : फ : भ : : कोन भु : \frac{अ}{२} : कोन भु : \frac{ब}{२} : कोन भु : \frac{क}{२}$$

(७) अ ब क ड चौरसाच्या अ ब बाजूंत ३ शोरांची ब क बा-
जूंत २ शोरांची आणि क ड बाजूंत ३ शोरांची अशा मेरणा कार्य क-
रितात. चवथ्या बाजूंत चवथी मेरणा कार्य करीत असून त्यांनीं चौर-
स समतोल धरिला आहे तर चवथी मेरणा फाट.

उ. २ शोरांची क ड रेषेंत.

(८) त्रिकोणाच्या कोनबिंदूपासून समोरच्या बाजूवर काढलेले लं-
ब जर मेरणा दृशिवितील तर त्रिकोण समभुज असल्या शिवाय या मेर-
णा समतोल असणार नाहीत हें सिद्ध कर.

(९) अ ब क त्रिकोणांत न बिंदु आहे. न बिंदूतून बाजूंस स-
मांतर रेषा काढिल्या आहेत. त्रिकोणांत पडलेल्या या रेषा जर मेरणा दृ-
शिवितील तर त्या न त्रिकोणां दुभागल्या शिवाय समतोल असणार ना-
हींत असें सिद्ध कर.

(१०) एका दांड्याच्या दोहों शेवटांस दोन दोन्या बांधून त्या गांठावल्या
आणि एका स्थिर बिंदूस अडकविल्या. जर दांड्याचें कजन त्याच्या मध्यापासून
कार्य करील तर असें सिद्ध करकी दोहों दोन्यांचें ताण त्याच्या लांबीच्या म-
माणांत असतील.

दांड्याच्या मध्यासभोंवताळचीं भ्रामकत्वे घे.

(१०६)

प्रकरण ६.

प्रेरणा युग्म.

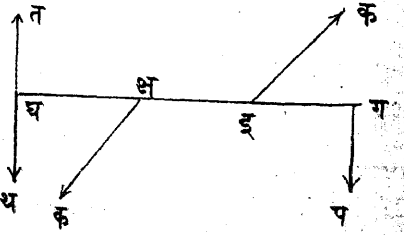
आणि

एकाच पातळीत अनेक स्थळीं कार्य
करणाच्या प्रेरणा.

(६९) जुळें किंवा युग्म- जेव्हां दोन समांतर प्रेरणा समान असून परस्पर उलट दिशांनी कार्य करित असतील, तेव्हां त्यांची परिणामी प्रेरणा काढतां येणार नाही. अशा प्रेरणांनी पदार्थीस कोणत्याच एका दिशेने गति मिळणार नाही. कारण त्यांचीं कार्ये समान असतात. परंतु त्यांच्या योगानें पदार्थी समतोल ही राहणार नाही. कारण त्या प्रेरणा एकाच बिंदूत परस्पर विरुद्ध दिशांनी कार्य करित नाहीत. अशा प्रेरणांपासून पदार्थी गरगरा फिरत राहतो. अशा तऱ्हेच्या दोन समान आणि विरुद्ध प्रेरणांस जुळें किंवा युग्म हें नांव दिलें आहे.

(७०) प्रेरणा युग्मास एक परिणामी प्रेरणा असूं शकत नाहीं हें सिद्ध ही करितां येते.

क, क हें एक प्रेरणा युग्म आहे. यास परिणामी प्रेरणा असणें शक्य असेल तर असें समजूं कीं, या युग्मास गप दिशेने कार्य करणारी प प्रेरणा क, क युग्मास समतोल धरिते.



अइ रेषा कक आणि प मेरणांच्या दिशांस अइ आणि ग ठिकाणीं मिळण्या जोगी काढ. अइ डावीकडे वाटवून इग = अ घ घे. घ ठिकाणीं मत्येक प च्या बरोबरीची वतिच्या दिशेशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी अशा दोन त, थ मेरणा परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करणाऱ्या लाव. याणें मूळच्या समतोलत्वांत फेर पडणार नाही.

ज्यापेक्षां कक युग्मास प मेरणा समतोल धरिते, त्यापेक्षां त्यास प च्या बरोबरीची युग्मापासून तेवढ्याच अंतरावर उलट दिशेंत कार्य करणारी त मेरणा ही समतोल धरिल. म्हणून कक आणि त यांस काढून टाकिलें नरी बाकीच्या प आणि थ परस्पर समतोल असल्या पाहिजेत. परंतु या एकाच दिशेस कार्य करीत असल्यानें ही गोष्ट अशक्य आहे. याच प्रमाणें युग्माच्या पानळींत कोठेंही कार्य करणारी मेरणा युग्मास समतोल देवूं शकणार नाहीं असें दाखवितां येईल.

(७१) दोन समांतर मेरणा समान व विरुद्ध दिशांनीं कार्य करणाऱ्या असतील तर त्यांस मेरणा युग्म किंवा युग्म अथवा जुळे असें म्हणावें.

दोहों मेरणांच्या दिशांसधील लंब रूप जें अंतर त्यास युग्माची भुजा असें म्हणावें.

युग्माची एक मेरणा वतिची भुजा यांच्या गुणाकारास युग्माचें भ्रामकत्व असें म्हणावें.

जी रेषा युग्माच्या पानळीशीं लंब आहे व जिची लांबी युग्माच्या भ्रामकत्वाच्या प्रमाणांत आहे तिचा युग्माचा आस म्हणावें.

युग्माच्या कार्यानें पदार्थास जें भ्रमण प्राप्त होतें तें सर्वदा एकाच दिशेंत होत नाहीं. हें भ्रमण कधीं उजवीकडून डावीकडे आणि कधीं डावीकडून उजवीकडे होईल. त्या प्रमाणें युग्मास किंवा त्याच्या दिशांस धन व ऋण हीं नांवें देतात. युग्माच्या भुजेचा

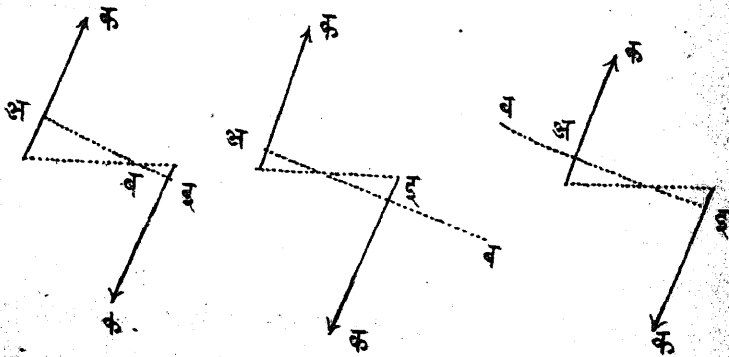
(१०८)

मध्य बिंदु स्थिर असून त्या भोंवती युग्माच्या प्रेरणांनी भुजा फिरत आहे असे कल्पिले तर भुजा दोन भिन्न दिशांनी भ्रमण करील. भुजेच्या मध्यांतून युग्माच्या पातळीवर लंब म्हणजे युग्माचा आंसकादिला. व त्या आंसा भोंवती युग्माने पदार्थ फिरत असला तर घड्याळाच्या कांद्या ममाणे भ्रमण होत असेल तेव्हा त्या युग्माच्या भ्रामकत्वास धन आणि त्या उलट भ्रमण होत असेल तेव्हा त्याच्या भ्रामकत्वास ऋण म्हणतात. एका दिशेने भ्रमण करविणाऱ्या युग्मांस सजातीय आणि भिन्न दिशांनी भ्रमण करविणाऱ्या युग्मांस विजातीय युग्मे म्हणावे.

आता प्रेरणा युग्माविषयी मुख्य सिद्धांत सांगतो

सिद्धांत १- प्रेरणा युग्माचे त्याच्या पातळीतील कोणत्याही बिंदु भोंवताळचे भ्रामकत्व सर्वदा सारखे असते. व ते दोहों प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांच्या बेरजे बरोबर असते.

क, क हे एक युग्म आहे आणि त्याच्या पातळीतील ब हा एक बिंदु आहे. ब पासून दोहोंच्या काहीदृशिक रेषांवर ब अ व ब इ



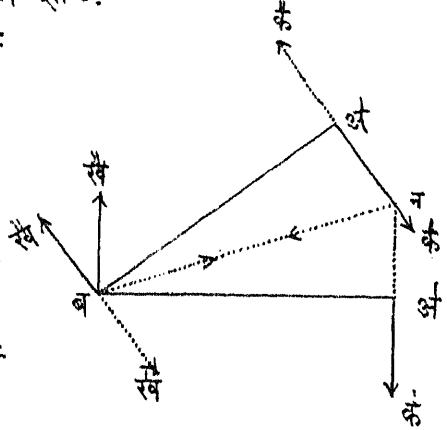
हेलंब कावः जर ब बिंदु दोहोंच्या मध्ये असेल तर दोहोंची भ्रामकत्वे सजातीय असतील. म्हणून त्यांच्या भ्रामकत्वांची $k \times अ + क \times बइ = क(अ + बइ) = क \times अइ$ होईल. जर ब बिंदुबा

हेर असेल, तर दोहोंचीं भ्रामकत्वं विजातीय असतील म्हणजे एक धन आणि एक ऋण असेल त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज $(क \times ब) - (क \times बइ) = क(बअ - बइ) = क \times अइ$ असेल. म्हणजे पूर्वीच्या इतकंच भ्रामकत्व झालं.

सिद्धांत २ - प्रेरणाः

युग्म त्याच्या पातळीत त्याच्या भुजेच्या एका टोंकाभोवती कसेंही फिरविलें तरी त्याचा परिणाम तेवढाच होतो.

अक, बरव हे एक प्रेरणा युग्म असून त्याची भुजा अ व ब आहे.



समजा की, ब अ भुजा ब भोवतीं ब अ या स्थितीत फिरविली. अ या बिंदुस्थळीं अक एवढ्याच अक, अक या दोन समान प्रेरणा परस्पर विरुद्ध आणि ब अशीं लंब अशा लाविल्या आणि ब बिंदुस्थळीं ही ब अशीं लंब आणि प्रत्येक अकशीं समान अशा दोन बरव आणि बरव या दोन समान व विरुद्ध प्रेरणा लाविल्या. या नव्या प्रेरणांचे जोड परस्पर समान आणि विरुद्ध असल्याने त्यांचा परिणाम कांहीं होणार नाही. म्हणून या चार प्रेरणा आणि मुळचे युग्म यांपासून मुळच्या इतकाच परिणाम होईल.

अक आणि अक यांच्या कार्यदृशिकरेषा परस्पर एका न बिंदूत मिळे पर्यंत वाटीव, आणि ब न सांध.

आतां ब अन आणि ब अन हे दोन काटकोन त्रिकोण समान आहेत. म्हणून ब न रेषा अन अ आणि अन ब अ या कोनांस दुभागव. अक आणि अक या प्रेरणा समान आहेत. यांस न बिंदुस्थळीं कार्य करण्यास लाविलें तर त्यांची परिणामी प्रेरणा अन अ कोनास

आणि रव
 मी मेरणा
 आणि
 वरील या
 असल्या
 समान मे
 म्हणजे व
 माणे अ
 तां येते

क
 प
 क
 न

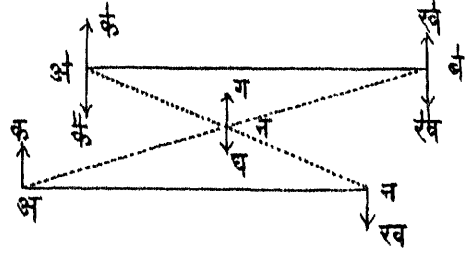
लंबदि
 केवा
 णाच्या
 रस्स
 नाणि
 या ए
 मेरणा
 दि
 म्हणू

न एकाच रेषेत परस्पर विरुद्ध दिशांनी कार्य करित असल्याने नाशपाव
 वतील म्हणजे रव, रव आणि कक मेरणा परस्पर नाश पावल्या म्हण-
 जे बाकी रव आणि क या दोन मेरणा व आणि अ ठिकाणी राहिल्या
 या मूळच्या मेरणांशी समान आहेत. म्हणून पहिलेच युग्म या नव्या
 स्थितीत नेल्या सारखे झाले.

सिद्धांत ३- दृढ पदार्थावर कार्य करणाऱ्या युग्माच्या
 भुजेचे तिच्याशी समांतर अशा युग्माच्या पातळीत स्थलांतर केले
 तरी युग्माचे कार्य मूळच्या इतकेच होते.

समजा कीं अक

आणि बरव हे युग्म अ
 व भुजेवर कार्य करित
 आहे. या युग्माच्या पा-
 तळीत अ व ही रेषा अ

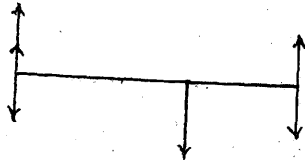


वच्या बरोबर व तिशीं समांतर अशी काढ अ व व या ठिकाणी
 अ व शी लंब रेषेत कार्य करणाऱ्या व अ क शीं समान अशा अ क
 अ क आणि ब र व ब र व या चार मेरणा लाव. येणे करून मूळ-
 च्या युग्माच्या कार्यात फेर पडणार नाही. कारण हे दोन जोडप-
 रस्पर समान व विरुद्ध असल्याने त्यांची कार्ये परस्पर नाश पाव-
 तील. आतांच्यापेक्षां अ व आणि अ व या दोन रेषा परस्पर
 समान व समांतर आहेत त्यापेक्षां अ व व अ या समांतर भुजेचे
 कोनाचे कर्ण अ व आणि अ व हे परस्परांस छेदन बिंदुस्थळीं दु-
 भागितील. ते न ठिकाणीं दुभाजतात असे समजू. आतां अ व
 कर्णाच्या अ आणि व टोंकांपाशीं अ क, ब र व या दोन समान मेर-
 णा एकाच दिशेस कार्य करित आहेत यांच्या जागी त्यांची परि-
 णामी मेरणा न ठिकाणीं कार्य करणारी व अ क शीं समांतर
 अशी न ग मेरणा ठेव. आणि अ व या कर्णाच्या टोंकाशीं कार्य

करणाच्या कंक आणि बरव या समान व समांतर प्रेरणांच्या जागीत्यांची परिणामी प्रेरणा नष्ट ठेव. या परस्पर समान व एकाच रेषेत असल्याने त्यांचे कार्य घडणार नाही. म्हणून अंक, बरव आणि अंक, बरव या चार प्रेरणा परस्पर नाश पावतात. यास्तव या चौहोंसमुळीच काढून टाकिले, तरी हरकत नाही. यांस काढिल्यावर बाकी अंक आणि बरव या दोन समान व परस्पर विरुद्ध प्रेरणा अंब ठिकाणी कार्य करणाऱ्या राहिल्या. अंब ही रेषा या युग्माची भुजा व ती मूळच्या युग्माच्या अंब भुजे एवढीच घेतली आहे. हे युग्म असून याच्या प्रेरणा मूळच्या युग्माच्या प्रेरणां एवढ्याच आहेत. म्हणून मूळचेच युग्म या नवीन ठिकाणी आणिल्यासारखे आहे.

कुरलरी- अंब रेषा युग्माच्या पातळीत न घेता त्या पातळीशी समांतर अशा पातळीत अंब रेषी समांतर घेतली, तरी वरील सर्व कृति व सिद्धता लागू होईल. म्हणून युग्माच्या भुजेचे युग्माच्या पातळीत किंवा त्या पातळीशी समांतर अशा दुसऱ्या पातळीत तिच्याशी समांतर असे स्थलांतर केले तरी त्याच्या कार्यात फेर पडत नाही. मात्र नव्या स्थितीत युग्मापासून भ्रमण मूळच्याच दिशेने झाले पाहिजे.

सिद्धांत ४- ज्याच्या भुजांची एकी कडची ठेके एका बिंदूत मिळतात आणि ज्यांची आसकळे समान आहेत अशा दोन प्रेरणा युग्मांची कार्ये समान होतात आणि एकाच्या जागी दुसरे ठेविले तरी फेर पडत नाही.



(११३)

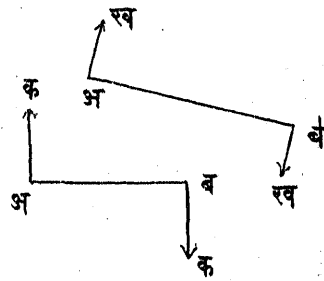
एका युग्माच्या मेरणा क,क आहेत. दुसऱ्या युग्माच्या मेरणा रव,रव आहेत. एकाची भुजा अ,ब आहे. दोहोंचीं टोंकें अ बिंदूत मिळतात. दुसऱ्याची भुजा अ,ब रेषेंत नसल्यास अ बिंदु भोंवती फिरवून तिला अ,ब रेषेंत आण. दुसऱ्या युग्माची भुजा अ,अ झाली. अ आणि अ या दोहों बिंदूंच्या स्थळीं रव मेरणेच्या बरोबरीच्या अरव, अरव आणि अंग, अंग अशा चार मेरणा लाविल्या तर त्या परस्पर नाश पावतील, व यामुळें मूळच्या युग्माच्या कार्यांत फेर पडणार नाहीं.

या दोहों युग्मांचीं भ्रामकत्वे समान आहेत.

$$\therefore क \times अ,ब = रव \times अ,अ$$

या करितां ब,क आणि अंग यांची परिणामी मेरणा (क-रव) अ स्थळीं कार्य करणारी असेल. व ती अरव या दिशेनें कार्य करील. (कलम ५९ पहा) त्या ठिकाणीं अरव ही मेरणा आहेच. यामुळें अरव म्हणजे रव, आणि क-रव अशा दोन मेरणा अरव या रेषेंत कार्य करतील म्हणून फक्त क मेरणा अरव या रेषेंत कार्य करील. क मेरणा अक दिशेंत कार्य करित आहे. यास्तव या दोनही नाश पावतील. म्हणून बाकी अंग आणि अरव अशा दोन समान व समांतर मेरणा रव च्या बरोबरीच्या राहिल्या, म्हणजे क,क युग्माच्या जागीं तेवढ्याच भ्रामकत्वाचे रव,रव युग्म राहिलें. यास्तव दोहोंचें कार्य सारखें असून एकाच्या जागीं दुसरें ठेवण्यास हरकत नाहीं.

सिद्धांत ७ - एका युग्माच्या जागीं तेवढ्याच सजातीय भ्रामकत्वाचें दुसरें युग्म त्याच्या पातळींत ठेवितां येईल. क,क आणि रव,रव हीं दोन सारख्या व सजातीय भ्रामकत्वांची युग्मे आहेत. तर एक काढून त्याच्या जागीं दुसरें ठेवितां येईल.



कारण क,क युग्माची भुजा अब अ भोवती फिरवून अब तीं समांतर करिता येईल. नंतर अब भुजा बकडे वाढवून तीस अब बरोबर करितां येईल. आणि तिच्या दोहों वोंकां सरवृत्त या प्रेरणा लावितां येतील. आणि शेवटीं तिचें तिशीं समांतर स्थलांतर करून तीस अब या जागीं आणितां येईल.

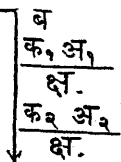
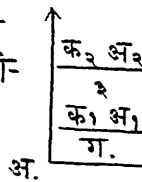
(७२) वरील सिद्धांतावरून हे उघड आहे कीं जर एकाच पातळींत किंवा परस्पर समांतर अशा दोन पातळ्यांत असणाऱ्या दोन सजातीय युग्मांची भ्रामकत्वे समान असल्यास त्यांची कार्यसमान होतील. आणि अशीं युग्मे किंजानीय म्हणजे परस्पर विरुद्ध दिशांनी भ्रमण उत्पन्न करणारी असल्यास परस्पर समतोल असतील.

सिद्धांत ६ - अनेक युग्मांचें परिणामी युग्म काढणें - अनेक युग्मांच्या भ्रामकत्वाच्या बेरजे बरोबर ज्या युग्माचें भ्रामकत्व असतें तें त्याचें परिणामी युग्म असतें.

क_१ क_२ क_३ क_४ युग्माच्या प्रेरणा आहेत.
अ_१ अ_२ अ_३ अ_४ त्यांच्या भुजा आहेत.
क_१ अ_१+क_२ अ_२+क_३ अ_३+क_४ अ_४ त्यांच्या भ्रामकत्वाची बेरीज होईल.

आतां प्रत्येक युग्माच्या जागीं असें दुसरें युग्म ठेवा. त्याच्याभास अब म्हणजे क्ष होईल.

म्हणजे चौथ्या सिद्धांता ममाणें क_१ अ_१ या युग्माच्या जागीं



$\frac{क_१ अ_१}{क्ष}$ प्रेरणा अ स्थळीं आणि एवढीच प्रेरणा व स्थळीं असें युग्म होईल. $क_२ अ_२$ यांच्या जागी $\frac{क_२ अ_२}{क्ष}$ अ स्थळीं आणि $\frac{क_२ अ_२}{क्ष}$ व स्थळीं असें युग्म होईल. या प्रमाणें केल्यानें अ स्थळीं $\frac{क_१ अ_१ + क_२ अ_२ + क_३ अ_३}{क्ष}$ ही प्रेरणा आणि व स्थळीं एवढीच दुसरी प्रेरणा होईल. म्हणजे हें परिणामी युग्म होईल. या युग्माचें भ्रामकत्व $क_१ अ_१ + क_२ अ_२ + क_३ अ_३ \dots$ इत्यादि म्हणजे सूळच्या युग्माच्या भ्रामकत्वाच्या बेरजेबरोबर होईल.

जर $\frac{क_१ अ_१}{क्ष}$, $\frac{क_२ अ_२}{क्ष}$ इत्यादि.

प्रेरणांस $क_१, क_२, क_३ \dots$ इत्यादि.

नांवें दिलीं तर.

$क्ष(क_१ + क_२ + क_३ \dots) = क_१ अ_१ + क_२ अ_२ + क_३ अ_३ \dots$

जर $क_१ + क_२ + क_३ \dots = ०$

तर सूळचीं युग्में समतोल असतील.

यावरून हें उघड आहे कीं, जर अनेक युग्मांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होईल, आणि जेव्हां युग्में उजवी कडून डावीकडे व डावीकडून उजवीकडे भ्रमण उत्सन्न करणारीं असतील तेव्हां त्यांचीं भ्रामकत्वां धन व ऋण होतील. व त्यांची बेरीज शून्य होईल. तर तीं युग्में समतोल असतील. तसेंच जर दोन युग्में सारख्या भ्रामकत्वांचीं पण परस्पर उलट भ्रमण करणारीं असतील तर तींही समतोल असतील.

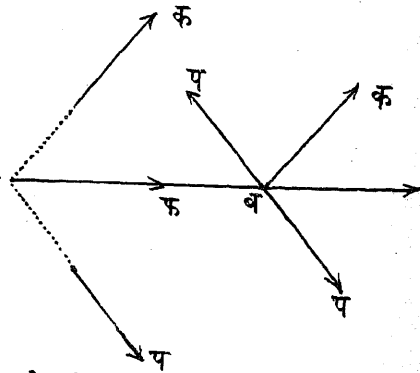
सिद्धांत ७ — एकाच पातळींत एक प्रेरणा व एक प्रेरणा युग्म अशीं एका वृत्तपदार्थावर कार्य करित असतील, तर जें कार्य घडेल, तेवढेंच ती प्रेरणा दुसऱ्या ठिकाणीं तिच्या सूळच्या दिशेचीं समांतर लाविल्यास उत्सन्न करील.

क ही एक प्रेरणा आहे व प ही युग्माची प्रेरणा आहे.

जर विवक्षित प्रेरणा, युग्मांच्या प्रेरणांशीं समांतर असेल, तर क व युग्माची त्या दिशेस कार्य करणारी प प्रेरणा यांची परिणामी प्रे-

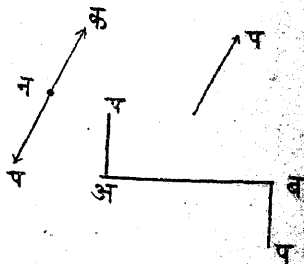
रणा क + प होईल. आणि क + प आणि युग्मांची दुसरी प्रेरणा प परस्पर उलट दिशेने कार्य करतील. म्हणून त्यांची परिणामी प्रेरणा क + प - प = क होईल व ही मूळच्या क प्रेरणेच्या दिशेशी समानतर असेल.

जर प्रेरणा परस्पर समानतर नसल्या तर क आणि युग्मांपैकी एक प्रेरणा यांच्या कार्य मार्गाच्या रेषा वाढविल्या म्हणजे त्या अक्षी मिळतील. अक्षी दोनही प्रेरणांस कार्य करण्यास लावून त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ. ती फ आहे असे घेऊ. आता फ प्रेरणेची कार्य दिशेची रेषा वाढविल्यास ती युग्माची जी दुसरी प प्रेरणा तिच्या कार्य मार्गास मिळेल. ती ब ठिकाणी मिळाली असे घेऊ. व ब ठिकाणी त्या प्रेरणेस कार्य करण्यास लावू. आता तिचे पृथ-



करण करून तिच्या मूळच्या प्रेरणांशी समानतर अशा क, प प्रेरणा काढू. प, प प्रेरणा परस्पर उलट व एकारेषेत असल्याने नाश पावतील, आणि क प्रेरणा ब ठिकाणी मूळच्या क प्रेरणेशी समानतर अशी कार्य करणारी राहील.

(२) क ही प्रेरणा न विट्टवर न क दिशेने कार्य करिते व प, प हे एक युग्म त्याच पातळीत कार्य करित आहे त्याची भुजा अ ब आहे म्हणून त्याचे भ्रामकत्व प x अ ब आहे.



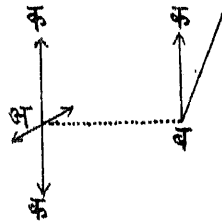
वरील सिद्धांत ४ प्रमाणे प x अ ब या युग्माच्या बरोबरी-

(११७)

जें दुसरें असें युग्म काढकीं, त्याची मत्येक मेरणा क मेरणे बरोबर असेल. तर त्याची भुजा $\frac{प \times अब}{क}$ होईल, हें युग्म असें फिरीव कीं, त्याची एक मेरणा सूळच्या क मेरणेच्या कार्यदर्शक रेषेंत पण उलट दिशेनें कार्य करील. आतां सूळची क मेरणा आणि तिच्या कार्यदर्शक रेषेंत पण उलट दिशेनें कार्य करणारी मव्या युग्माची क मेरणा या परस्पर नाश पावतील. आणि बाकी क मेरणा सूळच्या मेरणेच्या दिशेनीं समांतर दिशेनें आणि तिजपासून $\frac{प \times अब}{क}$ लंबरूप अंतरावर कार्य करणारी राहिल. म्हणून सूळची मेरणा व युग्म यांच्या बरोबर ही एक मेरणा झाली.

सिद्धांत ८ — जर एकादी मेरणा पदार्थावर कार्य करीत असेल तर तिच्या बदला तिशीं समांतर दिशेनें पदार्थाच्या दुसऱ्या विवक्षित बिंदूंत तीच मेरणा लाविली आणि तिच्या विवक्षित बिंदु सभोवतालच्या भ्रामकत्वा एवढ्या भ्रामकत्वाचें युग्म लाविलें तरी या दोहोनीं कार्यें सूळच्या मेरणेच्या कार्या एवढीच होतील.

समजाकीं, क मेरणा बक दिशेनें पदार्थावर कार्य करीत आहे. अ हा दुसरा बिंदु पदार्थातील आहे अ स्थळीं क च्या बरोबरीच्या दोन समान मेरणा परस्पर विरुद्ध दिशांनीं कार्य करणाऱ्या लाविल्या तर त्यांचीं कार्यें परस्पर नाश पावतील. व त्यापासून पदार्थावर कांहीं निराळें कार्य घडणार नाही. परंतु आतां व बिंदुस्थळीं जी एक क मेरणा पूर्वी कार्य करीत होती तिच्या जागीं अ स्थळीं तेवढीच क मेरणा सूळच्या मेरणेचीं समांतर दिशेनें कार्य करीत असून बक, अक हें युग्म ही कार्य करीत आहे. अ पासून बक वर अ व लंब काट म्हणजे सूळच्या क मेरणेचें अ सभोवतालचें भ्रामकत्व \times अब आहे. तेच क, क या युग्माचें ही भ्रामकत्व आहे; यास्तव



मूळची एक मेरणा तीच मेरणा व युग्म यांच्या बरोबर आहे.

या प्रमाणे जेव्हा एका पातळीत अनेक मेरणा पदार्थावर कार्य करित असतील तेव्हा या सर्व मेरणांस दुसऱ्या विवक्षित बिंदूवर कार्य करण्यास लावून तितकी युग्मे ही लावितां येतील. मात्र त्या युग्मांची भ्रामकत्वे विवक्षित बिंदु सभोवतालच्या मेरणांच्या भ्रामकत्वाबरोबर असावीं, व युग्मांचे एक टोंक विवक्षित बिंदूत असावे.

आतां विवक्षित बिंदुस्थळीं लाविलेल्या अनेक मेरणांची एक परिणामी मेरणा काढितां येईल. आणि तसेंच जीं अनेक युग्मे कार्य करण्यास लाविलीं त्यांचे एक परिणामी युग्मही काढितां येईल.

(७३) या सिद्धांतावरून हे स्पष्ट आहे कीं, जर एका पातळीत अनेक स्थळीं अनेक मेरणा कार्य करित असतील, व त्या परस्पर समांतर नसतील, तर वरील प्रमाणे प्रत्येक मेरणेविषयीं करित गेल्यानें त्यांच्या जागीं दुसऱ्या एका स्थळीं कार्य करणाऱ्या त्याच मेरणाव तितकीं युग्मे येतील.

(१) या सर्व मेरणा एका स्थळीं कार्य करतील. आणि त्यांच्या दिशा मूळच्या मेरणांशीं समांतर व परिमाणे तैवरींच असतील यांची एक परिणामी मेरणा त्या बिंदुस्थळीं कार्य करणारी काढितां येईल.

(२) जीं अनेक युग्मे येतील त्यांचीं भ्रामकत्वे मूळच्या मेरणांच्या भ्रामकत्वाबरोबर असतील. अनेक युग्मांचे भ्रामकत्व मेरणांच्या भ्रामकत्वाच्या बरोबर होईल.

(१) जर परिणामी युग्म नाश पावले, म्हणजे जर अनेक युग्मांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होईल, तर एका बिंदूत कार्य करणाऱ्या मेरणांची परिणामी मेरणा राहिली, म्हणजे दिलेल्या अनेक मेरणांस एक परिणामी मेरणा व्हासेल.

(२) जर एका बिंदूंत कार्य करणाऱ्या अनेक मेरणांची परिणामी मेरणा नाश पावेल तर सूळच्या अनेक मेरणा एका युग्माबरोबर असतील.

(३) जर परिणामी मेरणा व परिणामी युग्म दोनही झुम्य होतील, म्हणजे नाश पावतील, तर सूळच्या मेरणा समतोल असतील.

(४) जर दोनही नाश पावणार नाहीत तेव्हां त्यांच्या जागी (सिद्धात ७ ममाणें) एक मेरणा ठेवितां येईल.

यास्तव जर अनेक मेरणा एका पातळींत कार्य करीत असतील तर त्या समतोल असतील. किंवा एका परिणामी मेरणेबरोबर असतील किंवा एका युग्माबरोबर असतील.

(७४) जर मेरणा एका बिंदूंत कार्य न करितां पदार्थावर एका पातळींत अनेक बिंदूवर कार्य करीत असल्यातरी मेरणा संचरत्व आणि मेरणेकीकरण यांच्या सहाय्यानें त्यांची परिणामी मेरणा काढितां येते.

अनेक मेरणा अनेक स्थळीं कार्य करणाऱ्या असतील तेव्हां त्या परस्पर समांतर असतील किंवा नसतील. समांतर मेरणांची परिणामी मेरणा (क. ५२ ममाणें) काढतां येईल. मात्र जेव्हां एकादिशेस कार्य करणाऱ्या समांतर मेरणांची परिणामी मेरणा विरुद्ध दिशेस कार्य करणाऱ्या परिणामी मेरणेबरोबर असेल, आणि त्या एका रेषेंत कार्य न करतील तर तें युग्म होईल आणि समांतर मेरणांची परिणामी मेरणा युग्म होईल म्हणजे त्या मेरणांपासून पदार्थास भ्रामक गति मास होईल.

मेरणा समांतर नसतील तेव्हां कोणत्याही दोन मेरणा घ्याव्या. त्यांच्या दिशा परस्पर मिळेपर्यंत वाढवाव्या. त्या बिंदूंत मेरणा (मेरणा-संचरत्वाच्या नियमाप्रमाणें) कार्य करीत आहेत असें समजावें. आणि त्यांची परिणामी मेरणा काढून ती त्या दोन मेरणांच्या जागी घ्यावी. न-

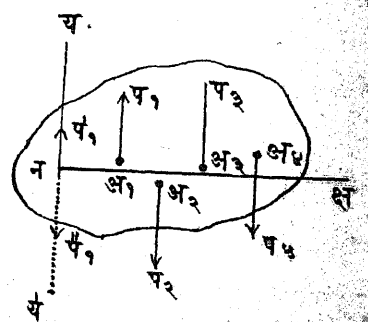
तर या परिणामी प्रेरणेची दिशा तिसऱ्या प्रेरणेच्या दिशेस विरुद्धा जोगी वाढवावी. नंतर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढून त्याच्या जागी ती घ्यावी. या प्रमाणे करित असतां मध्येच परिणामी प्रेरणा दुसऱ्या प्रेरणेशीं समान, समांतर आणि विरुद्ध दिशेनें कार्य करणारी आली तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढतां येणार नाहीं. परंतु हें युग्म आणि दुसरी प्रेरणा यांचें स्ति. ७. प्रमाणें एकीकरण करून एक प्रेरणा काढतां येईल. असें करितां करितां अखेरीस युग्मच आलें तर अनेक प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा युग्म होईल, जर अखेरीस एक युग्म व एक प्रेरणा राहिली तर त्यांचें एकीकरण करून एक प्रेरणा काढतां येईल. जर अखेरीस प्रेरणा परस्पर नाश पावतील तर त्या परस्पर समतोल असतील. यास्तव जर अनेक प्रेरणा अनेक स्थळीं पदार्थावर कार्य करित असतील, तर त्या समतोल असतील. किंवा त्यांस एक परिणामी प्रेरणा असेल, किंवा त्यांस एक परिणामी युग्म असेल.

(३५) एकाच पातळींत पदार्थावर अनेक ठिकाणीं कार्यकरणान्या अनेक प्रेरणा समतोल राहण्यास कोणत्या गोष्टी अवश्य लागतात तें काढणें

(१) प्रथमतः प्रेरणांच्या दिशा परस्पर समांतर आहेत असें घेऊं.

P_1, P_2, P_3, P_4 इत्यादि समांतर प्रेरणा एकाच पातळींत A_1, A_2, A_3, A_4 इत्यादि बिंदुस्थळीं कार्य करित आहेत. यांची परिणामी प्रेरणा काढणें आहे.

प्रेरणांच्या पातळींत एक न बिंदु घेऊन त्या पासून नथरेषा प्रेरणांच्या दिशांशीं समांतर का-



द आणि नय वर नक्षत्र लंब काद.

प, प_२ इत्यादि मेरणांच्या दिशांवर न बिंदूपासून काढलेले लंब क्ष, क्ष_२, क्ष_३, क्ष_४ इत्यादि आहेत असें माचूं हे लंब म्हणजे मेरणांच्या दिशा नक्षत्र रेघेस मिळेपर्यंत वाढविल्या म्हणजे छेदन बिंदूंचीं अंतरें च असतील.

आतां न बिंदूपाशीं प_१ मेरणेच्या बरोबरीच्या आणि तिच्याशीं समांतर दिशेंत कार्य करणाऱ्या म्हणजे नय रेषेंत कार्य करणाऱ्या अशा दोन समान मेरणा प_१, प_१, परस्पर विरुद्ध दिशांनी कार्य करणाऱ्या लाव. तर प_१, आणि प_२ हे युग्म होईल. व यांचें भ्रामकत्व प_१, क्ष_१, असेल. यास्तव मूळच्या प_१ मेरणेच्या जागीं न ठिकाणीं कार्य करणाऱी प_१ मेरणा आणि प_२, क्ष_२, हे युग्म अशा झाल्या व त्यांचें कार्य मूळच्या मेरणे एवढेंच राहिलें. या प्रमाणें प्रत्येक प_२ च्या बरोबरीची आणि परस्पर विरुद्ध दिशेनें नय रेषेंत कार्य करणाऱ्या अशा दोन मेरणा न बिंदुस्थळीं लाविल्या तर अ_२ ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या प_२ मेरणेच्या जागीं न ठिकाणीं नय रेषेंत कार्य करणाऱी प_२ मेरणा आणि प_२, आणि प_२ हे युग्म होतील. या युग्माचें भ्रामकत्व प_२, क्ष_२ आहे. हे भ्रामकत्व ऋण आहे. कारण या युग्मानें पहिल्याच्या उलट दिशेनें भ्रमण घडेल.

या प्रमाणें करीत गेल्यानें अ_१, अ_२, अ_३ इत्यादि ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या मेरणांच्या जागीं य न य या रेषेंत न बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या मेरणा येतील. व तितकीं युग्में येतील. य न य रेषेंत कार्य करणाऱ्या मेरणांची परिणामी मेरणा त्यांच्या केवळ बेरजे बरोबर असेल म्हणजे.

$$प = प_१ - प_२ + प_३ - प_४ \dots \dots \dots$$

अनेक युग्मांचें एक परिणामी युग्म काढितां येईल. व त्याचें भ्रामकत्व अनेक युग्मांच्या भ्रामकत्वांच्या बेरजे बरोबर आ

स मिळ
न त्यांच्या
सी मेर
रानें कार्य
गार ना
प्रमाणें क
करितां क्ष
रणा यु
र त्यांचें
मेरणा प
स्तव अ
रु, तर त्या
असेल,
नय करणा
प्र लागता
स्त असें

ळींत आ,

अ_१
क्ष

प_१

सेल म्हणजे.

$$p_1 \text{ क्ष}_1 - p_2 \text{ क्ष}_2 + p_3 \text{ क्ष}_3 - p_4 \text{ क्ष}_4 \dots \dots \dots$$

ज्या प्रेरणा विरुद्ध दिशेने कार्य करितात त्यांस ऋण चिन्ह जोडावयाचें आणि ज्यांची भ्रामकत्वे विरुद्ध दिशांनी भ्रमण उत्पन्न करतील त्यांसही ऋण चिन्ह लावावयाचें हें नेहमी गमिर्त असतें. म्हणून परिणामी प्रेरणा दृशविण्यास प आणि परिणामी युग्म दृशविण्यास ग अशीं अक्षरें घेतलीं तर साधारण सारण्या अशा होतील.

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \dots \dots \dots$$

$$g = p_1 \text{ क्ष}_1 + p_2 \text{ क्ष}_2 + p_3 \text{ क्ष}_3 + p_4 \text{ क्ष}_4 \dots \dots \dots \text{ पन क्षन}$$

p_1, p_2, p_3 प्रेरणा समतोल असण्यास

$$p_1 + p_2 + p_3 \dots \dots \dots = 0$$

$$p_1 \text{ क्ष}_1 + p_2 \text{ क्ष}_2 + p_3 \text{ क्ष}_3 \dots \dots \dots = 0$$

असें असलें पाहिजे. पहिली प्रेरणांची साधी बेरीज आहे दुसरी सारणी प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज आहे. न हा पातळीतील हवा तो बिंदु आहे.

या करितां अनेक समांतर प्रेरणा समतोल राहण्यास त्यांची बेरीज शून्य असली पाहिजे, आणि पातळीतील मत्येक बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहिजे.

जर फक्त समांतर प्रेरणांची बेरीज शून्य असून भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य नसेल, तर प्रेरणा बरोबर एक युग्म असेल, व त्याचें भ्रामकत्व प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांच्या बेरजे बरोबर असेल.

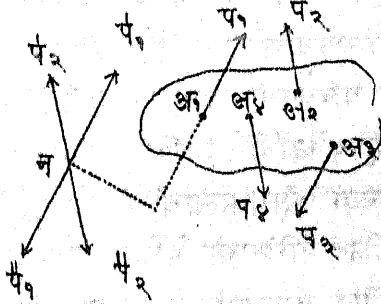
जर भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असेल तर प्रेरणा बरोबर एक परिणामी प्रेरणा असेल.

जर दोनही शून्य नसतील तर त्या प्रेरणा बरोबर एक परिणामी प्रेरणा व एक परिणामी युग्म असेल व यां बरोबर एक प्रेरणा नि-

पेल.

(२) असें समजूं कीं, p_1, p_2, p_3, p_4 मेरणा परस्पर समांतर नसून ह्या त्या दिशांनी कार्य करितात.

मेरणांच्या पातळींतून हा कोणताही बिंदु घे आणि नक्षत्र आणि नक्षत्र या परस्पराशी काढकोन करणाऱ्या रेषा काढ.



न ठिकाणी p_1 आणि p_2 या परस्पर विरुद्ध दिशांनी

कार्य करणाऱ्याच p_1 च्या दिशेची समांतर आणि तिच्या बरोबरीच्या अशा लांब तर p_1 आणि p_2 हे एक युग्म होईल. म्हणून $अ_1$ ठिकाणी कार्य करणाऱ्या p_1 मेरणेच्या बरोबर न ठिकाणी कार्य करणारी p_2 मेरणा आणि p_1 आणि p_2 हे एक युग्म आहेत. याच प्रमाणे $अ_2$ ठिकाणी कार्य करणाऱ्या p_2 मेरणेच्या जागी न ठिकाणी कार्य करणारी p_3 आणि p_2 आणि p_3 हे युग्म घेता येईल. $अ_3$, $अ_4$, $अ_5$ इत्यादि न बिंदूपासून p_1, p_2, p_3 इत्यादि मेरणांच्या दिशांवरील लंब समजले, तर वरील दोहों युग्मांची भ्रामकत्वे $p_1, अ_1, p_2, अ_2$ होतील; म्हणजे प्रत्येक युग्मांचे भ्रामकत्व मेरणेच्या भ्रामकत्वा बरोबर असते. म्हणून सर्व मेरणांच्या जागी न ठिकाणी कार्य करणाऱ्या $p_1, p_2, p_3, p_4 \dots \dots$ इत्यादि मेरणा आणि तितकीच युग्मे ज्यांची भ्रामकत्वे $p_1, अ_1, p_2, अ_2, p_3, अ_3, p_4, अ_4 \dots \dots$ इत्यादि (जसें मेरणा आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे कार्य करित असतील तर) असतील. न ठिकाणी कार्य करणाऱ्या मेरणांची परिणामी मेरणा काढता येईल. तसेंच अनेक युग्मांचे परिणामी युग्मही काढता येईल. परिणामी युग्मांचे भ्रामकत्व अनेक युग्मांचे

(१२४)

च्या भ्रामकत्वांच्या म्हणजे अनेक मेरणांच्या भ्रामकत्वांच्या बे-
रजे बरोबर होईल.

(१) यास्तव अनेक मेरणांच्या कार्यापासून पदार्थ सम-
तोल राहण्यास त्या मेरणांनीं एका बिंदुस्थळीं कार्य केल्यास
त्यांस परिणामी मेरणा नसावी. म्हणजे त्यांची परिणामी मेर-
णा शून्य व्हावी. आणि मेरणांच्या पातळींतील प्रत्येक बिंदुभों-
वतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असावी.

जर परिणामी मेरणा मात्र शून्य असेल तर सर्व मेरणांब-
रोबर एक युग्म असेल. त्यांचें भ्रामकत्व मेरणांच्या पातळींतील को-
णत्याहि बिंदुभोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांच्या बेरजे बरोबर होईल.

जर भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असेल तर मेरणांस एक परिणा-
मी मेरणा असेल.

जर दोनही शून्यनसतील तर मेरणांबरोबर एक मेरणा व एक
युग्म असेल; आणि त्यां बरोबर एक परिणामी मेरणा काढितां ये-
ईल.

(७६) जर एका पातळींत पदार्थावर तीन मेरणा कार्य क-
रीत असून त्या त्यास समतोल ठेवीत असतील, तर त्या परस्पर
समांतर असतील किंवा त्यांच्या दिशा परस्पर एका बिंदूंत मि-
ळतील.

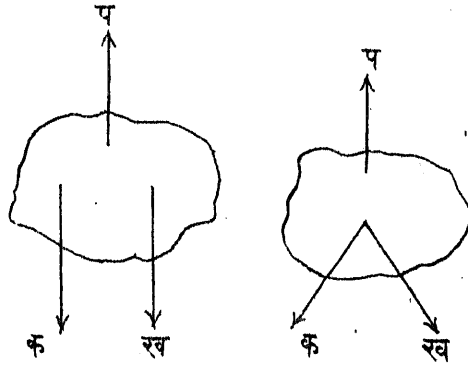
क, रव आणि प या तीन मेरणा आहेत.

(१) क, रव समांतर आहेत असें घेऊं. या दोहोंस एक
परिणामी मेरणा असेल व ती चांशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य
करील, आतां तिसरी मेरणा प, क आणि रव मेरणांस समतोल
ठेविते. या करितां क, रवची परिणामी मेरणा आणि तिसरी प मेर-
णा चांशीं एकाच रेषेंत पण परस्पर उलट दिशांनीं कार्य केलें पाहि-
जे; म्हणून पची दिशा क, रवच्या दिशांशीं समांतर असली पा-

हिजे.

(२) क, र, व मेरणांच्या दिशान बिंदूंत मिळतात असें घेऊं. क, र, व

यांची परिणामी मेरणा
न बिंदूंतून जाईल. परं-
तु पदार्थ तीनही मेरणां
नीं समतोल असल्या-
सुद्धें ही मेरणा व प मे-
रणा परस्पर नाश पा-
वल्या पाहिजेत. तसें
होण्यास त्यांची कार्ये
परस्पर विरुद्ध दिशां-
नीं एका रेषेंत झालीं



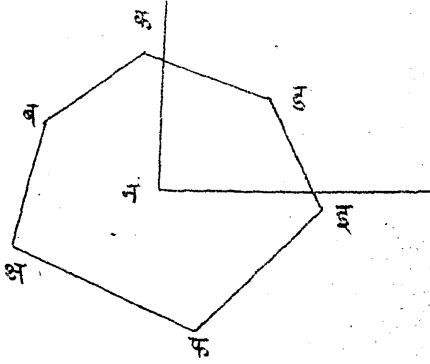
पाहिजेत. म्हणून पची दिशान बिंदूंतून गेलीच पाहिजे.

हा सिद्धांत क. ६५ यांत सांगितल्या प्रमाणें ही सिद्ध क-
रितां घेतो. तीन मेरणा समतोल असल्यास त्यांची परिणामी मेर-
णा शून्य असली पाहिजे. व पातळीतील कोणत्याही बिंदु भोंवतालच्या
भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहिजे. दोन मेरणा न बिंदूंत मि-
ळतात असें समजूं. तर न भोंवतालच्या क, र, व यांच्या भ्रामकत्वा-
ची बेरीज शून्य आहे. तिघांच्या न संबंधीं भ्रामकत्वाची बेरीज शू-
न्य होण्यास प चें भ्रामकत्व शून्य असलें पाहिजे. असें होण्या-
स प ची दिशा न मधून गेलीच पाहिजे. जर दोन मेरणा समांतर
असतील तर परिणामी मेरणा शून्य होण्यास तिसरी मेरणा याशीं
समांतर व विरुद्ध असलीच पाहिजे.

(७७) पातळींत काढलेल्या बहुकोणाकृतीच्या बाजू क-
सानें परिमाणानें व स्थानानें मेरणा दर्शवितील, तर त्यांची परि-
णामी मेरणा शुभ्र होईल व त्याचें भ्रामकत्व बहुकोणाकृतीची दु-

प्यट दर्शविल.

अबकडइफ बहु कोणाकृतीच्या बाजू परिमाणानें व स्थानानें अनेक स्थळीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणा दर्शवितान. म्हणजे अब बाजू अठिकाणीं अब दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा दर्शविते. बक बाजू बठिकाणीं बक दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा दर्शविते. या प्रमाणें बाकी बाजूही दर्शवितान.



बहुकोणाकृतींत न एक बिंदु घेऊन प्रत्येक प्रेरणेच्या बदला क-७१ लि-८ प्रमाणें न ठिकाणीं तिच्याशीं समान व समांतर अशी प्रेरणा आणि एक युग्म ठेव. म्हणजे न ठिकाणीं बहुकोणाच्या अब, बक... .. बाजूशीं समान व समांतर अशा प्रेरणा येतील. त्या प्रेरणा बहु कोणाच्या सिद्धांता प्रमाणें समतोल असतील. म्हणजे त्यांची परिणामी प्रेरणा शून्य होईल. अनेक युग्माचें एक परिणामी युग्म काढितां येईल व त्याचें भ्रामकत्व अनेक युग्मांच्या भ्रामकत्वाबरोबर असेल परंतु प्रत्येक युग्माचें भ्रामकत्व प्रत्येक प्रेरणेच्या न भोंवताळच्या भ्रामकत्वाबरोबर आहे. म्हणून परिणामी युग्माचें भ्रामकत्व =

$$२\Delta \text{अनब} + २\Delta \text{बनक} + २\text{कनड} \dots \dots \dots$$

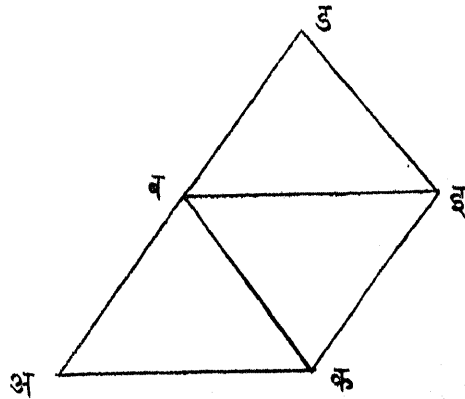
म्हणजे बहुकोणाकृतीच्या क्षेत्राच्या दुप्पट आहे. यास व बहुकोणाकृतीच्या बाजूनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणाबरोबर एक युग्म असतें व त्याचें भ्रामकत्व बहुकोणाच्या क्षेत्राच्या दुप्पट

द असते.

युग्माचें त्याच्या पातळींतील कोणत्याही बिंदु संबंधीं भ्रामकत्व नित्य सारखें असतें. म्हणून बिंदु आकृतीच्या बाहेर घेतला तरी हरकत नाही.

उदाहरण १ - अ ब क त्रिकोणाच्या अ ब, ब क आणि क अ बाजू परिमाणानें व कार्यमार्गानें तीन भेरेणा तीन ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या दर्शवितात. तर त्यांची परिणामी भेरेणा काढ.

अब वाढवून
नअब = बडक
र, बड रेखा अ ब भेरेणा दर्शविली ती ब ठिकाणीं कार्य करिते असें समजू. ब क ही ब ठिकाणीं कार्य करिते. ब क इ ड समांतर-



सुज चौकोन पुरा करून त्यांची परिणामी भेरेणा बई काढ. बई अ क अशीं समांतर व समान आहे, म्हणून बई आणि क अ या भेरेणा परस्पर समान, समांतर आणि विरुद्ध आहेत म्हणून ते युग्म आहे. यास्तव अ ब, ब क आणि क अ या भेरेणांबरोबर एक युग्म निघातें. ब पासून क अ वर लंब काढिला तर तो लंब आणि क अ यांच्या गुणाकाराबरोबर म्हणजे त्रिकोणाच्या क्षेत्राच्या दुपटी बरोबर त्या युग्माचें भ्रामकत्व होईल.

उदाहरण २ - अ ब क त्रिकोणाच्या अ ब, ब क आणि अ क या बाजू परिमाणानें व कार्यमार्गानें तीन स्थळीं कार्य करणाऱ्या भेरेणा दर्शवितात. तर त्यांची परिणामी भेरेणा काढ.

(१२८)

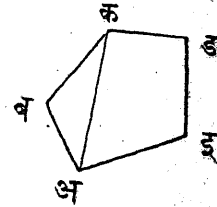
मागील उदाहरणांत सांगितल्या प्रमाणें अब आणि बक यांची परिणामी प्रेरणा बडू काढूनंतर बडू आणि अक या दोन समान व समांतर प्रेरणा एकाच दिशेनें कार्य करितात, म्हणून त्याची परिणामी प्रेरणा अक च्या दुप्पट असेल आणि अब बाजूच्या मध्यापासून करील.

उदाहरण ३ - बहुकोणाकृतीच्या बाजूंच्या मध्य बिंदूंच्या ठिकाणी त्याशीं लंब अशा दिशांनीं अनेक प्रेरणा पदार्थावर कार्य करित आहेत व त्या बाजूशीं परिमाणानें प्रमाणांत आहेत; तर प्रेरणा बहुकोणाच्या मध्याकडे किंवा मध्यापासून बाहेर कार्य करित असल्यास त्या समतोल असतात.

त्रिकोणाच्या बाजूंच्या मध्यावर अशा कार्य करणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतात असें मागे एका उदाहरणांत सिद्ध केले आहे. (प्रकरण ३ उदाहरण ५ पहा.)

अब कडू या बहुकोणाकृतीच्या बाजूंच्या प, फ, ब, भ, म या मध्यावर त्यांशीं लंब दिशेंत प्रेरणा कार्य करित आहेत.

अक आणि अडसांध. अबक त्रिकोणाच्या अब, बक आणि अक बाजूंच्या मध्यावर त्रिकोणाच्या मध्यापासून बाहेर व बाजूवर लंब अशा दिशांनीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतात. म्हणून अब, बक बाजूंच्या मध्यावर त्रिकोणाच्या मध्यापासून बाहेर कार्य करणाऱ्या प्रेरणा अकच्या मध्यावर व परिमाणानें अक शीं प्रमाणांत अशा त्रिकोणाच्या मध्याकडे कार्य करणाऱ्या प्रेरणे बरोबर आहेत. या करितां अब, बक यांच्या मध्यावर कार्य करणाऱ्या प्रेरणांच्या जागीं ही प्रेरणा घे पुनः अकडू त्रिकोण घेतल्या तर अकच्या मध्यावर बाह्य दिशेनें कार्य क-

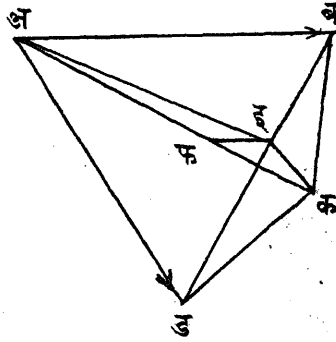


रणारी ही प्रेरणा व कड, अड यांच्या मध्यावर बाह्य दिशेने कार्य करणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतील म्हणून अक आणि कड यांच्या मध्यावर बाह्य दिशेने कार्य करणाऱ्या प्रेरणा बरोबर अड वर अडशी प्रमाणात अड ही अंतर दिशेने कार्य करणारी प्रेरणा होईल. अडच्या मध्यावर कार्य करणारी ही प्रेरणा आणि अड, डड यांच्या मध्यावर बाह्य दिशेने कार्य करणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतात, म्हणून सर्व प्रेरणा समतोल आहेत हे सिद्ध झाले.

याच प्रमाणे अंतर दिशेने कार्य करणाऱ्या प्रेरणा ही समतोल असतात हे दाखविता येईल.

उदाहरण ४ — अबकड ही एक चतुष्कोणाकृति आहे. हिजवर कार्य करणाऱ्या प्रेरणा परिमाणाने व दिशेने अब, अड, कड आणि कड बाजू दर्शविताने तर असे सिद्ध करू की, अक, बड कर्णांचे मध्य सांधणाऱ्या दिशेने यांची परिणामी प्रेरणा कार्य करील व परिमाणाने डच्या चौपट असेल.

बड कर्णाचा मध्य ड आणि अक कर्णाचा मध्य फ आहे. अड, कड आणि फड सांधऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा फड रेषेत कार्य करील व तिच्या चौपट परिमाणाने असेल हे सिद्ध करावयाचे. अब आणि अड यांची परिणामी प्रेरणा अड दिशेने कार्य करील व २ अड बरोबर असेल. तसेच कड, कड यांची परिणामी प्रेरणा कड दिशेने कार्य करील व २ कड बरोबर असेल.



डअ आणि डक यांची परिणामी प्रेरणा डफ दिशेने कार्य

(१२०)

करील व २ इफ बरोबर असेल, याच ममाणें अइ आणि कइ यांची ही परिणामी मेरणा फइ दिशेने कार्य करील. आणि २ फई बरोबर असेल. म्हणून २ अइ आणि २ कइ यांची परिणामी मेरणा फइ बरोबर होईल.

उदाहरणें

(१) सजातीय समान व समांतर मेरणा रॉबसांच्या तीन कोन बिंदूवर त्यांच्या पातळीशीं लंब अशा दिशेने कार्य करितात. तर चवथ्या कोन बिंदूवर केवढ्या मेरणेने कार्य करावे म्हणजे चारी मेरणा एका युग्मा बरोबर होतील. जर चवथी मेरणा ६०° चा कोन करणाऱ्या दिशेने कार्य करित असेल तर युग्माचे आमकत्व काढ.

(२) अबकड इफ हा समभुज त्रिकोण आहे. समान मेरणा अब, बक, डइ इफ या रेषांच्या दिशांनी कार्य करित आहेत. या एका मेरणाच्या दुप्पट प्रत्येक मेरणा आहे. अशा दोन समान मेरणा डक आणि अफ या रेषांच्या दिशांनी कार्य करितात. तर त्या समतोल असतील असे सिद्ध कर.

(३) अबकड हा चौरस आहे. ३ शेरांची मेरणा अ पासून बकडे, ४ शेरांची ब पासून ककडे, आणि ५ शेरांची क पासून डकडे, अशा कार्ये करितात, तर यांची परिणामी मेरणा काढ?

उ० $\sqrt{१०}$ शेर.

(४) एका समद्विभुज त्रिकोणाच्या बाजूंशीं ममाणांत अज्ञाती न मेरणा त्रिकोणाच्या तीन बाजूंच्या रेषांत कार्य करितात. समान बाजूंत कार्य करणाऱ्या मेरणा शिरकोनापासून पायाकडे कार्य करणाऱ्या आहेत. तर त्यांची परिणामी मेरणा काढ.

उ० पायाच्या मध्यांतून एके बाजूंशीं समांतर रेषेत कार्य करील आणि परिमाण तिच्या दुप्पट असेल.

(५) अबक त्रिकोणाच्या बक, क अ आणि अ ब बाजूं
त न, म रू असे बिंदु घेतले आहेत कीं,

बन	कम	अर
नक	मअ	रब

तर असें सिद्ध करकीं, न, म रू बाजूंचें मध्य नसतील तेव्हां अ न, ब-
म आणि क र रेषांनीं दर्शविणाऱ्या मेरणा एका युग्माचरोबर अस-
तील आणि ते मध्य असतील तेव्हां त्या समतोल असतील.

टीप- कौन बिंदु भोंवताळचीं भ्रामकत्वं घ.

(६) अबक एक त्रिकोणाकार पत्रा आहे. अड, बड, कफ
हे बाजूंवर लंब आहेत, तर असें सिद्ध करकीं, बड, कड, कड,
अड, अफ, बफ या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या मेरणा पत्र्यावर कार्यक-
रितील तर त्यांची परिणामी मेरणा त्रिकोणाच्या भोंवताळच्या व-
र्तुळाच्या मध्यांतून जाईल.

(७) क, र व, ग, घ या चार मेरणा काढकौन चौकोनाच्या बाजूं
मी कार्य करितात, त्यांच्या परिणामी मेरणेची दिशा काढा.

(८) एका बहुकोणाकृतीच्या एक दिवाथ करून बाकी बाजू
मेरणा दर्शवितात, तर असें दाखवीवकीं, त्यांची परिणामी मेरणा रा-
हिल्या बाजूंनीं समांतर दिशेंत काम करील.

(९) परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषांचीं दोळे सांधून जी आ-
कृति बनते तिच्या बाजूंनीं चार मेरणा कार्य करित असतील आ-
णि त्यांची परिमाणें व दिशा आकृतीच्या बाजू क्रमानें दर्शवितील
तर असें सिद्ध करकीं त्यांची परिणामी मेरणा युग्म होईल. आणि
त्याचें भ्रामकत्व वरच्या वर्तुळाच्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रांच्या व
जाबाकीच्या दुप्पट असेल.

(१०) अ, ब हे दोन स्थिर बिंदु वर्तुळाच्या परिघांत आहेत, अ ब व
वर्तुळांत क हा एक बिंदु घेतला आणि क अ, क ब या रेषांत दो-

(१३२)

न प्रेरणा कार्य करण्यास लाविल्या, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा समो-
रच्या दुसऱ्या वर्तुळ भागांतील एका स्थिरबिंदूतून नेहमी जाईल.

(११) मअ, मब या रेषा दोन प्रेरणा आणि नक, नड या रेषा
दुसऱ्या दोन प्रेरणा दर्शवितात. मन रेषा अब आणि कड रेषां-
सदुभागील तर मात्र चारी प्रेरणा समतोल असतील असे सिद्ध क-
र.

(१२) चतुष्कोणाकृतीत असा एक बिंदु काढकीं, त्या पासून कोन-
बिंदू पर्यंत रेषा काढिल्या आणि त्यांनी प्रेरणा दर्शविल्या तर त्या समतोल
ल असतील.

(१३) अब कड हा एक चौकोन वर्तुळांत काढलेला आहे. म
फ, व या प्रेरणा अब, अड आणि क अ दिशांनी कार्य करितात आ-
णि त्या कड, बक आणि बड हीं प्रमाणांत आहेत. तर त्या स-
मतोल आहेत असे सिद्ध कर.

(१४) ज्यांच्या दिशांमध्ये 60° चा कोन आहे अशा क, क
प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा परस्पर उब दिशांत कार्य करणाऱ्या रव, रव
प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणे बरोबर असेल. तर असे सिद्ध करकीं :-

$$क : रव : : \sqrt{2} : \sqrt{3}.$$

(१५) क आणि व हे दोन स्थिरबिंदु आहेत. क अ आणि क
ब रेषा दोन प्रेरणा दर्शवितात. जर अ बिंदु एका सरळ रेषेत सरेल. म
जे त्या रेषेत कोठेही अ बिंदु घेतला तर क अ, क ब प्रेरणांच्या परि-
णामी प्रेरणेचें एक टांक वरील रेषेची समांतर रेषेत असेल.

(१३३)

प्रकरण ७.



गुरुत्वमध्य

(७८) प्रत्येक पदार्थ पृथ्वीकडे आकर्षिला जातो. त्याचा प्रत्येक कणही आकर्षिला जातो. घासुळे पदार्थ किंवा द्रव्याचा एकादा कण मोकळा सोडिला की तो पृथ्वीवर पडतो. ज्या शक्तीने हे आकर्षण घडते त्यास गुरुत्वाकर्षण म्हणतात. जें एकंदर आकर्षण घडते त्यास त्याचें वजन किंवा गुरुत्व असें म्हणतात. पदार्थाचा प्रत्येक कण ज्या जोरांने पृथ्वीकडे ओढिला जातो. त्या सर्व जोरांची जीबेरीज तें त्या सर्व पदार्थाचें वजन होय. म्हणजे त्या सर्व जोरांची, किंवा मेरणांची जी परिणामी मेरणा तें त्याचें वजन होय.

ज्या दिशेने पदार्थाचे कण पृथ्वीकडे आकर्षिले जातात, म्हणजे कोणत्याही स्थळीं ज्या दिशेने मोकळा पदार्थ पडेल, ती त्या स्थळाची दिक्कुरेपा म्हणजे लंब रेषा समजावी. त्या स्थळीं ओळंबा या दिशेने स्थिर राहतो. ही दिक्कुरेपा संध पाण्याच्या पातळीशीं लंब असते.

दिक्कुरेपां काढकोन करणारी जी पातळी तिला क्षितिज-पातळी असें म्हणतात.

कण पृथ्वीच्या मध्याकडे आकर्षिले जातात. व पृथ्वी गोलाकार आहे म्हणून सर्व दिक्कुरेपा पृथ्वीच्या मध्याकडे वळतील. घासुव वस्तुतः ज्या दिशेने पृथ्वीकडे पदार्थ आकर्षिले जातात. त्या सर्व दिशा परस्पर समांतर नसतात. परंतु पृथ्वीच्या आकाराच्या व तिच्या भिज्येच्या मानानें पदार्थ घुतके लहान असतात कीं त्यांचे कण ज्या दिशांनी पृथ्वीकडे आकर्षिले जातात, त्या दिशा बहुतेक समांतरच असतात; आणि घटक कणांवरील आकर्षणांच्या वेरजे बरोब-

र सर्व पदार्थवरील आकर्षण असते, म्हणजे सर्व पदार्थांचे वजन घटक भागांच्या वजनांच्या बेरजेबरोबर असते.

पदार्थांच्या कणांची वजने म्हणजे एकाच दिशेकडे कार्य करणाऱ्या अनेक समांतर प्रेरणा होत. अशा समांतर प्रेरणांस सर्वदा मध्य असतो. त्या मध्यावर सर्व समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा म्हणजे सर्व पदार्थांचे वजन कार्य करील, म्हणून त्या बिंदूस त्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य असे म्हणतात.

पदार्थ मोकळा सोडिला असता या गुरुत्व मध्यातून जाणाऱ्या दिक् रेपेंतून पदार्थ स्वाली पडेल म्हणून जर गुरुत्व मध्यांत उलट दिशेचे कार्य करणारी प्रेरणा लाविली व ती पदार्थांस स्वाली पडू देणार नाही तर सर्व पदार्थ तोलला जाईल. पदार्थ कसाही धरिला तरी गुरुत्वमध्य बदलत नाही. या करिता गुरुत्वमध्यांत पदार्थ तोलून धरिल्यावर तो कसाही बांकडा तिकडा झाला तरी तोलला राहील.

ज्या समांणें एका पदार्थाचे कण एकमेकांस दृढ जोडलेले असतात तसे अनेक पदार्थ जर एकमेकांशीं दृढ जोडलेले असतील तर त्या पदार्थसमूहाचाही गुरुत्वमध्य असेल. कारण त्या पदार्थांच्या गुरुत्वमध्यांतून कार्य करणाऱ्या प्रेरणा समांतर असतील व त्यांस मध्य असेल. म्हणून हा मध्य तोलून धरिल्यानें पदार्थसमूह तोलला जाईल. यास्तव गुरुत्वमध्याची व्याख्या अशी देतात.

प्रत्येक पदार्थ किंवा पदार्थसमूह ग्रामध्यें असा एक बिंदु असतो की, तो बिंदु तोलून धरिला असतां सर्व पदार्थ किंवा पदार्थसमूह तोलला जातो. त्यास त्या पदार्थांचा किंवा पदार्थसमूहाचा गुरुत्वमध्य असे म्हणतात.

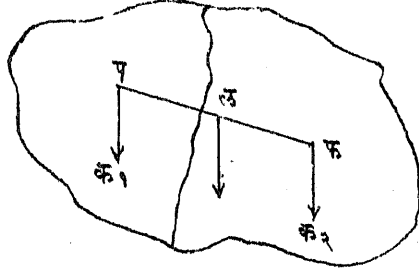
(७९) गुरुत्वविशिष्ट अशा दोन कणांचा गुरुत्वमध्य काढणे.

क, क, या वजनाचे दोन कण प, फ, तिकाणी आहेत.

(१३५)

क_१, क_२ वजनाचे दोन कण म्हणजे क_१ आणि क_२ या दोन समांतरप्रे-
रणा प, फ टिकाणी का-

र्य करणाऱ्या होत. म्हणून प, फ सांधून प-
फ रेषेचे ल स्थळीं अ-
से विभाग करकीं पलः



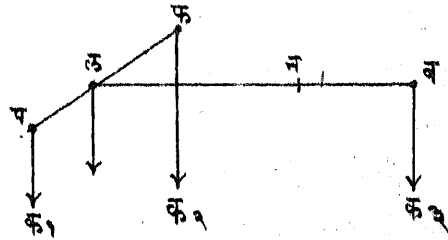
फ लः : क_२ : क_१
म्हणजे ल हा त्यांचा
मध्य झाला. ल मधु-

न या दोहोंची परिणामी प्रेरणा जाईल म्हणून जर क_१ आणि क_२
गुरुत्व झून्य अशा दृढ कांबीने जोडले असल्यास ल बिंदु तोळून धरि-
ल्यास दोन्ही कण तोळले जातील. म्हणून ल, क_१ आणि क_२ यांचा
गुरुत्वमध्य झाला.

(८०) अनेक कणांचा गुरुत्वमध्य काढणे.

क_१ क_२ क_३ क_४

इत्यादि वजनाचे कण प,
फ, ब, भ या टिकाणी आ-
हेत. म्हणजे क_१, क_२, क_३,
क_४ इत्यादि समांतर प्रे-
रणा त्या बिंदुस्थळीं का-



र्य करीत आहेत. या प्रेरणांचा मध्य मार्गें सांगितल्या ममाणें काढिला
तर न हा होईल तर न हाच त्यांचा गुरुत्वमध्य आहे. कारण या स-
र्व प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा म्हणजे सर्व कणांच्या वजनाच्या बेरजेए-
वढे वजन न पासून कार्य करील. यास्तव जर सर्वकण न ही गुरुत्व
झून्य अशा सळ्यांनी जोडले असतील, तर न तोळून धरिला म्हणजे
सर्व कण तोळले जातील.

(८१) चावखून गुरुत्वविशिष्ट अशा कोणत्याही कणांचा समूह असला तरी त्यास गुरुत्वमध्य असेल. कारण सर्व कण एकाच दिशेने पृथ्वीकडे आकर्षिते जात असल्याने तितक्या एकाच दिशेस कार्य करणाऱ्या समांतर मेरणा असतात. अशा मेरणांस नेहमी परिणामी मेरणा असते. व ती इतर मेरणांशी समांतर असते.

कणसमूहाचे परिणामी वजन नेहमी गुरुत्व मध्यांतून कार्यकरिते म्हणून कोणत्याही पदार्थाचे सर्व वजन गुरुत्वमध्यांतच जमलेले आहे. असे मानण्यास हरकत नाही. ज्या पेक्षां अनेक मेरणांच्या जागी त्यांची परिणामी मेरणा ठेविली असता कार्य मूळच्या इतकेच होते त्या पेक्षां समतोलपणा राखण्यांत गुरुत्वविशिष्ट अशा पदार्थाचे कसे कार्य घडत आहे याचा विचार करणे असेल तेव्हा पदार्थाच्या वजनाएवढी मेरणा गुरुत्व मध्यांतून कार्य करित आहे असे समजण्यास हरकत नाही.

(८२) प्रत्येक पदार्थास किंवा पदार्थसमूहास एकच गुरुत्वमध्य असतो.

पदार्थास दोन गुरुत्वमध्य आहेत असे कल्पूः पदार्थ हवातसा फिरविला तरी गुरुत्वमध्य बदलत नाही. दोनही गुरुत्वमध्य क्षितिजाशी समांतर अशा पातळीत येतील असा पदार्थ फिरवावा.

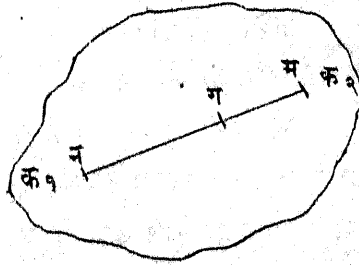
प्रत्येक पदार्थावर किंवा पदार्थ समूहावर गुरुत्वाकर्षणामुळे एकाच दिशेने कार्य करणाऱ्या अनेक समांतर मेरणा असतात. त्यांची परिणामी मेरणा एकच असून ती एकाच बिंदूतून कार्य करिते. मूळच्या मेरणा दिक् रेषेत कार्य करणाऱ्या होत्या म्हणून त्यांची परिणामी मेरणा दिक् रेषेतच कार्य करील दिक् रेषा क्षितिज पातळीशी लंब असते. आम्ही दोन गुरुत्वमध्य कल्पिले आहेत. पदार्थ रवाळी एकाच दिशेने म्हणजे दिक् रेषेत पडेल. दोन गुरुत्वमध्य आहेत म्हणून ही एक दिक् रेषा क्षितिजाशी समांतर अशा पातळीतील दोन बिंदूंमधून जाते.

असे होते, असें होणें अशक्य आहे. यास्तव एकाहून जास्त गुरुत्वमध्य असूं शकणार नाहीत.

(८३) पदार्थाच्या किंवा पदार्थसमूहाच्या दोन खंडांचें गुरुत्वमध्य दिलें असल्यास सर्गीचा गुरुत्वमध्य काढणें.

क_१ व क_२ या दोन खंडांचे गुरुत्वमध्य न आणि म आहेत सर्गीचा गुरुत्वमध्य काढणें. म्हणजे

न, म ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या क_१, क_२ मेरणांच्या परिणामी मेरणांचा कार्य करणाऱ्या बिंदु काढणें आहे. नम सांधून तिचे ग ग स्थळीं असे विभाग करी,



$$\frac{क_१}{क_२} = \frac{मग}{गन}$$

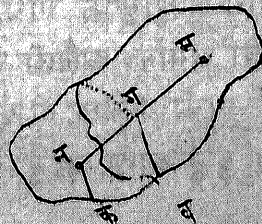
म्हणजे ग हा क_१ व क_२ यांचा मध्य झाला. म्हणून सर्व क_१ + क_२ पदार्थाचा ही गुरुत्वमध्य झाला.

(८४) सर्व पदार्थांचा आणि त्यांच्या एका खंडाचा असे गुरुत्वमध्य दिले असल्यास बाकी राहिल्या खंडाचा गुरुत्वमध्य काढणें.

व हें सर्व पदार्थाचें वजन आहे. एका खंडाचें क वजन आहे तर राहिल्या खंडाचें व - क झालें. म्हणून व ही क आणि व - क या दोन समांतर मेरणांची परिणामी मेरणा आहे. व आणि क यांचे गुरुत्वमध्य गन आहे. गन सांधून ती रेखा ग कडे इतकी वाढीव की,

$$\frac{क}{व-क} = \frac{गम}{गन}$$

$$गम = \frac{क}{व-क} \times गन.$$



(८७.) सरळ रेषेचा गुरुत्वमध्य काढणे.

या स्थितीं सरळ रेषा भूमितीतील केवळ दोन बिंदुमधील अंतर दर्शविणारी नसून समरूप अशी द्रव्य रेषा घेणे आहे. समरूप द्रव्य पत्रेपासून म्हणजे बारीक तार किंवा कांब जिची सर्वत्र लांबी रुंदी जाडी सारखी आहे.

अ ————— प ————— क ————— फ ————— व

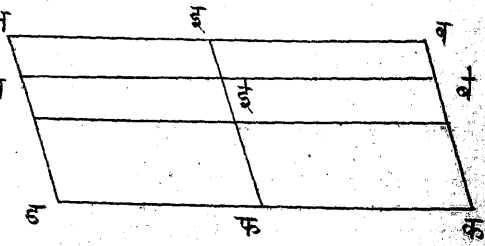
अशा समरूप द्रव्यमय रेषेचा जो मध्य तोच तिचा गुरुत्वमध्य असतो. समजा की, अ व व ही एक रेषा आहे.

ही रेषा समरूप द्रव्यमय रेषा अनेक सारख्या कणांची बनलेली असते. आतां रेषेच्या क मध्य बिंदूपासून सारख्या अंतरावरचे कोणतेही दोन कण प, फ घेतले तरी कण सारखे असल्याने त्यांचा गुरुत्वमध्य क मध्य बिंदु असेल यास्तव सर्व रेषेचा गुरुत्वमध्यही मध्य बिंदु होईल.

(८६.) समांतरभूज चौकोनाचा गुरुत्वमध्य काढणे.

येथे समांतर भूज चौकोन म्हणजे समरूप द्रव्यमय समांतरभूज चौकोन घेणेच, म्हणजे ज्याची जाडी अत्यंत कमी पण सर्वत्र सारखी आहे, असा समांतरभूज चौकोनाकार पत्रा समजावयाचा.

अ व क ड अ
हा समांतर चौकोन
आहे याच्या अ व
आणि क ड बाजू इ
आणि फ स्थितीं दु-



भाग आणि इ फ सांध, आतां अ व इ ही दुसरी कोणतीही अडव रेषा समान काढिली तर ती अ ड इ फ आणि क ड रेषांस अ व व स्थिती मिळेल. ती इ स्थितीं इ फ रेषेनें दुभागली जाईल. कारण ड व आणि क इ हे समांतरभूज चौकोन होनात म्हणून

अई = बई.

या प्रमाणे कोणतीही अड्ड, बक रेषांनी मर्यादित अशी अवशी समांतर रेषा काढिली, तरी ती इफ रेषेने दुभागली जाईल. म्हणून अशा प्रत्येक रेषेचा गुरुत्वमध्य तिचा मध्य बिंदु असेल.

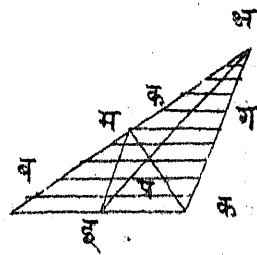
अबकड्ड समांतरभूज चौकोन समरूप, द्रव्यमय आणि अवशी समांतर अशा रेषांचा बनलेला आहे. अशा प्रत्येक रेषेचा गुरुत्वमध्य तिचा मध्य बिंदु असतो. हा मध्य बिंदु इफ रेषा तिच्या स्थळी मिळते, त्या स्थळी असतो. यास्तव सर्व समांतरभूज चौकोनाचा गुरुत्वमध्य इफ रेषेत आहे असे ज्ञाते.

याच प्रमाणे अड्ड आणि बक यांस दुभागून ते बिंदु सांघिते तर त्या रेषेत ही समांतरभूज चौकोनाचा गुरुत्वमध्य असेल. ज्यापेक्षा इफ रेषेत व या रेषेत गुरुत्वमध्य आहे, त्यापेक्षा या दोन रेषा ज्या स्थळी परस्पर छेदिली, तो छेदनबिंदु सर्व समांतरभूज चौकोनाचा गुरुत्वमध्य होईल.

यास्तव समांतरभूज चौकोनाच्या समोरा समोरच्या बाजूचे मध्य सांघणाच्या रेषा ज्या बिंदूत छेदिली तो बिंदु चौकोनाचा गुरुत्वमध्य असतो.

(८७) त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य काढणे.

अबक हा त्रिकोणाकार समरूप असा पत्रा आहे. बक बाजू इ स्थळी दुभागून अई सांघ. अक बाजूत केठेही फ बिंदु घेऊन तेथून बक-शी फग समांतर रेषा काढिली, ती न बिंदूत अईस फग मिळते, व तर न बिंदूत अईने दुभागली जाईल.



कारण अबड्ड आणि अफन, हे त्रिकोण आणि अकड्ड आणि

(१४०)

अग्न, हे त्रिकोण सरूप आहेत.

∴ (यु. बु. ६, सि. ४)

फन	अन
बइ	अइ
गन	अन
कइ	अइ
फन	गन
बइ	कइ

कइ = बइ; ∴ फन = गन.

म्हणून फ ग चा न मध्य बिंदु आहे म्हणून तोच त्या रेषेचा गुरुत्व मध्य आहे. या प्रमाणे ब क शीं अब रेषेत बिंदु घेऊन कोणतीही समांतर रेषा अक ने मर्यादित अशी काढिली, तर ती अइ ने दुभागिली जाईल.

अब क, हा त्रिकोण ब क शीं समांतर अशा अनेक रेषांचा बनला आहे त्या सर्व रेषांचे मध्य अइ रेषेत आहेत म्हणून सर्व त्रिकोणाचा मध्य अइ रेषेत असला पाहिजे.

या प्रमाणे जर अब, म स्थळीं दुभागून कम बिंदु सांथिले आणि अब शीं अक, ब क नीं मर्यादित अशा समांतर रेषा काढिल्या, तर त्याही कम रेषेनें दुभागिल्या जातील. म्हणून सर्व त्रिकोणाचा गुरुत्व मध्य कम रेषेत असेल.

आतां ज्यापेक्षां त्रिकोणाचा मध्य अइ रेषेत आहे व कम रेषेत आहे त्यापेक्षां या दोन रेषा ज्या प बिंदूत छेदिलील तोच बिंदु त्रिकोणाचा गुरुत्व मध्य होईल.

प बिंदूचे म्हणजे त्रिकोणाच्या गुरुत्व मध्याचे अ पासून किंवा इ पासून अंतर किती असते तें काढूं

मइ सांथ, मइ रेषा अक शीं समांतर आहे. (यु. बु. ६, सि. २)

(१४१)

अपक आणि पमई हे त्रिकोण सरळ आहेत.

$$\therefore \frac{\text{इप}}{\text{इम}} = \frac{\text{अप}}{\text{अक}}$$

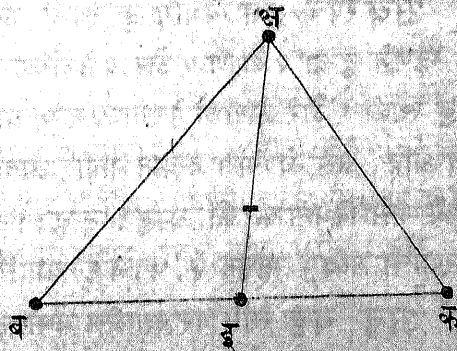
$$\therefore \frac{\text{इम}}{\text{अप}} = \frac{\text{इम}}{\text{अक}} = \frac{\text{बइ}}{\text{बक}} = \frac{१}{२}$$

यास्तव अप रेषा इप च्या दुप्पट आहे, म्हणून सर्व अइ रेषा इपच्या तिप्पट झाली. म्हणून प म्हणजे त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्यइ पासून अइ च्या तृतीयांश अंतरावर असतो. या करितां त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य कट्टेणं झाल्यास असा काढावा. त्रिकोणाची एक बाजू दुभागून तो बिंदु व त्या बाजूसमोरचा कोनबिंदु सांधावे. दुभागलेल्या बाजूपासून या रेषेच्या तृतीयांश लांबीवर त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य असतो.

प गुरुत्वमध्य अ, ब, क या कोनबिंदूशी सांधिल्यानें जे तीन अपब, वपक आणि अपक त्रिकोण पडतात ते परस्पर समान असतात. आणि प्रत्येक सर्व त्रिकोणांचा तृतीयांश असतो. कारण बइ = कइ $\therefore \triangle$ अबइ = \triangle अकइ आणि \triangle बपइ = \triangle कपइ $\therefore \triangle$ अबप = \triangle अकप तसेंच अम = बम $\therefore \triangle$ अपक = \triangle बपक.

(८८) त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांवर तीन सारख्या वजनांचे पदार्थ ठेविले तर त्यांचा गुरुत्वमध्य व त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य हे एकच असतात.

अबक त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांवर तीन सारख्या वजनांचे पदार्थ ठेविले आहेत असे समजून बक, इ स्थळीं दुभागून अइ सांध.



(१४२)

ब,क बिंदूंवरील दोन सारख्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य दु स्थळींअसेल, जातां इ स्थळीं दोन पदार्थ आहेत, व अस्थळीं एक पदार्थ आहे. यांचा गुरुत्वमध्य अड रेषेंत असल्या पाहिजे. अडचे पस्थळीं असे दोन विभाग कर कीं, अपः इपः :: २ : १. म्हणजे प हा अबक टिकाणाच्या तीन सारख्या वजनाच्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य झाला. परंतु वरच्या सिध्दांतावरून प हा त्रिकोणाचाही गुरुत्वमध्य आहे.

या ममाणें समांतर भूज चौकोन किंवा चौरस यांच्या कोनबिंदूंवर सारख्या वजनाचे पदार्थ ठेविले, किंवा सरूप म्हणजे एकाच दिशेनें कार्य करणाऱ्या मेरणा लाविल्या, तर त्यांचा मध्यव आकृतीचा मध्य हे एकच असतात, हें सिद्ध करितां येईल.

परंतु जर भिन्न वजनाचे पदार्थ किंवा भिन्न जोराच्या मेरणा कोनबिंदूंवर असतील, तर त्यांचा गुरुत्वमध्य निराळा असतो व तो सहज काढितां येतो. तसलीं दोन उदाहरणें देतो.

उदाहरण १ - अबक त्रिकोणाच्या कोनबिंदूंवर चार, पांच आणि सहा शेर वजनाचे तीन पदार्थ ठेविले आहेत, तर त्यांचा गुरुत्वमध्य काढ.

तीन कोन बिंदूंवर ४, ५, ६ शेर वजनाचे पदार्थ ठेविले आहेत. याचा अर्थ या तीन बिंदूंवर ४, ५, ६ शेर जोरांच्या तीन सरूप समांतर मेरणा कार्य करीत आहेत. आणि त्यांचा मध्य काढणें आहे.

अब रेषेचे असे विभाग ड, स्थळीं कर कीं, अडः बडः :: ५ : ४ म्हणजे ड हा ५ आणि ५ शेर वजनांच्या पदार्थांचा मध्य झाला म्हणून ड स्थळीं १ शेर जोराची मेरणा ५ व ५ या मेरणांच्या बदला कार्य करीत आहे, असें घेण्यास हरकत नाही. आतां कड सांध आणि कडू चे इ स्थळीं असे विभाग कर कीं, कडः डडः :: ९ : ६ म्हणजे ड हा ६ व १ या मेरणांचा मध्य, म्हणून ४, ५, व ६ या तिहींचा मध्य झाला.

अड, बड सांध तर रवाळील ममाण नित्य असतें ४ : ५ : ६.

कइब : कइअ : : अइब; कारण.

कडब : कडअ : : बड : अड : : ४ : ५.

बइड : अइड : : बड : अड : : ४ : ५

∴ कइब : कइअ : : ४ : ५.

या प्रमाणे तिसरेही प्रमाण सिद्ध होईल.

(८९) सारख्या जाडीची कांब किंवा तार वांकवून एक त्रिकोण केलेला आहे. त्याचा गुरुत्वमध्य काढणे आहे अशा त्रिकोणाच्या गुरुत्वमध्यास त्रिकोणाच्या परिमितान्चा गुरुत्वमध्य असे म्हणतात.

अबक हा असला त्रिकोण आहे. अब, बक, अक. या तीन सरूप द्रव्यमय रेषा आहेत. यांचे जे मध्यबिंदु तेच त्यांचे गुरुत्वमध्य होतील. ड, इ, फ हे त्यांचे मध्य आहेत त्या ठिकाणी त्यांच्या बाजूची वजनं कार्य करतील त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य काढणे म्हणजे ड, इ, फ ठिकाणाच्या तीन वजनांचा गुरुत्वमध्य काढणे आहे. ही तीन वजनें बाजूशीं प्रमाणांत आहेत.

ड : इ : फ : : अब : बक : अक.

डइ, इफ आणि डफ सांध, फडइ आणि डइफ कोनांस दुभागणाच्या डम आणि डन रेषा काढ. (यु. पु. ६, सि. ३)

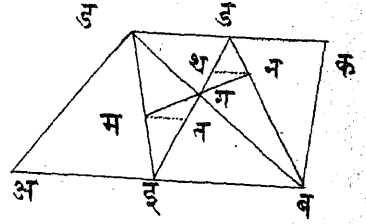
डन : फन : : डइ : फड : : अक : अब : : फ : ड

∴ न हा ड आणि फ, या वजनाचा म्हणजे अब अक, या बाजूंचा गुरुत्वमध्य झाला. तेव्हां तिहींचा गुरुत्वमध्य डन रेषेत असेल. तसेंच तिहींचा गुरुत्वमध्य डम रेषेत असला पाहिजे. म्हणून डम व डन ज्या ठिकाणी परस्परांस छेदितील तो गुरुत्वमध्य होईल. परंतु हा बिंदु डइफ त्रिकोणांन काढलेल्या वर्तुळाचा मध्य बिंदु असतो म्हणून त्रिकोणाच्या परिमितीचा गुरुत्वमध्य त्याच्या बाजूंचे मध्य सांधून जो त्रिकोण होतो त्यातील वर्तुळाचा मध्यबिंदु असतो.

(९०) द्वापिज्यमचा गुरुत्वमध्य काढणे.

अब कड हा द्रापिज्यम आहे. याच्या अब आणि कड बा-

जू परस्पर समांतर आहेत. अब
व कड यांस इ व ह या विंदु-
स्थळीं दुभाग आणि ह इ सांघ.
अबशी समांतर आणि अड व
बक या बाजूनी मर्यादित अ-



शी कोणतीही समांतर रेषा काढिली तर ती ह इ, रेषेनें दुभागिली जाई-
ल अब कड हा द्रापिज्यम अबशी समांतर अशा रेषांचा बनला आ-
हे व त्या सर्व रेषांचें गुरुत्वमध्य ह इ रेषेंत आहेत म्हणून सर्व द्रापिज्य-
मचा गुरुत्वमध्यही ह इ रेषेंत कोठें तरी असला पाहिजे.

इ व ह आणि ब व ह सांघ. $\frac{इइ}{३} = इम$, आणि $\frac{वह}{३} = हन$. क-
र म्हणजे म आणि न हे अबड आणि बकड या त्रिकोणांचे गु-
रुत्वमध्य झाले. म्हणून सान्या आकृतिचा गुरुत्वमध्य मन रेषेंत अ-
सला पाहिजे. परंतु आम्हीं वर सिद्ध केलेंच आहे कीं, तो ह इ रे-
षेंतही आहे. म्हणून मन व ह इ ज्या विंदूंत परस्पर छेदितील तो विंदु
सर्व आकृतीचा गुरुत्वमध्य होईल.

मन व ह इ या रेषा ग स्थळीं छेदितात म्हणून ग हा अब-
कड द्रापिज्यमचा गुरुत्वमध्य आहे. आतां ग इ चा अब कड
आणि ह इ यांशीं कसा संबंध असतो तो काढूं.

म आणि न पासून मत आणि नथ या अब किंवा कडशीं
समांतर काढ. त्या त आणि थ स्थळीं ह ई स मिळतात. ग इ = क्ष,
ग ह = य आणि अब = ७ व कड = घ असे धर.
मत आणि नथ या रेषा ड ह व ब इ यांशीं समांतर आहेत.

$$\therefore मत : डह :: इम : इड :: १ : ३$$

$$नथ : बइ :: हन : वह :: १ : ३$$

$$\therefore मत = \frac{१}{३} डह = \frac{१}{३} कड = \frac{१}{३} घ.$$

(१४५)

$$\text{नथ} = \frac{1}{2} \quad \text{बइ} = \frac{1}{2} \quad \text{अब} = \frac{1}{2} \quad \text{७}$$

मतग आणि नथग हे त्रिकोण सरूप आहेत म्हणून.

$$\text{गतः गथः} :: \text{मतः नथः} :: \frac{1}{2} \quad \text{कडः} \frac{1}{2} \quad \text{अबः} :: \text{घः} \quad \text{७}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{गत} = \text{गइ} - \text{इत} \\ \text{गथ} = \text{गह} - \text{हथ} \end{array} \right\} \text{आणि} \left\{ \begin{array}{l} \text{इत} = \frac{1}{2} \quad \text{हइ} = \frac{1}{2} (\text{क्ष} + \text{य}) \\ \text{हथ} = \frac{1}{2} \quad \text{इह} = \frac{1}{2} (\text{क्ष} + \text{य}) \quad \text{इत} = \text{हथ} \end{array} \right.$$

$$\therefore \frac{\text{गत}}{\text{गथ}} = \frac{\text{गइ} - \text{इत}}{\text{गह} - \text{हथ}} = \frac{\text{क्ष} - \frac{1}{2} (\text{क्ष} + \text{य})}{\text{य} - \frac{1}{2} (\text{क्ष} + \text{य})} = \frac{2\text{क्ष} - \text{य}}{2\text{य} - \text{क्ष}} = \frac{\text{मत}}{\text{नथ}} = \frac{\text{घ}}{\text{७}}$$

$$\therefore \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} = \frac{\text{७} + 2\text{घ}}{2\text{७} + \text{घ}} \quad ; \quad \text{य} = \text{हइ} - \text{क्ष}$$

$$\therefore \frac{\text{क्ष}}{\text{हइ} - \text{क्ष}} = \frac{\text{७} + 2\text{घ}}{2\text{७} + \text{घ}}$$

$$\therefore \frac{\text{क्ष}}{\text{हइ}} = \frac{\text{७} + 2\text{घ}}{2(\text{७} + \text{घ})} \quad \therefore \text{क्ष} = \text{गइ} \frac{\text{हइ}}{2} \times \frac{\text{अब} + 2\text{कड}}{\text{अब} + \text{कड}}$$

(९१) त्रिकोणाकार शंकूचा गुरुत्वमध्य काढणे.

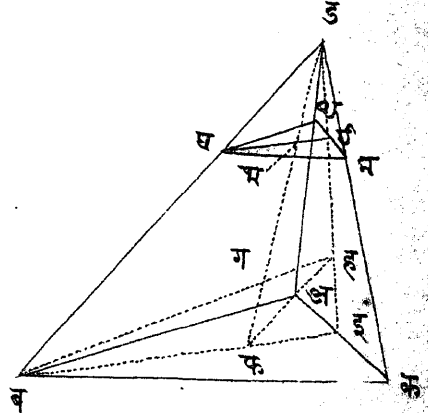
त्रिकोणाकार शंकूचा अबक त्रिकोण हा पाया आहे. आणि ड हा त्याचा शिरकोन आहे.

अक बाजू ड स्थळी दुभाग आणि बइ आणि डइ सांध. बइ रेषेत फ असा बिंदु घे की, फइ = $\frac{1}{2}$ बइ होईल. म्हणजे फ हा अबक त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य झाला. तसेच डइ रेषेत ह असा बिंदु घे की, इह = $\frac{1}{2}$ डइ होईल. म्हणजे ह हा अकड त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य झाला. आतां डफ आणि बह सांधिल्यास या दोन रेषा ग स्थळी मिळतील तर ग हा त्रिकोणाकार शंकूचा गुरुत्वमध्य होईल.

डब रेषेत घ हा बिंदु घे. आणि त्यापासून घम आणि घ७ या बक आणि अब, यांशी समांतर रेषा काढ. त्या अकड पातळीस म आणि ७ स्थळी मिळतात. ७म सांधतर ७म रेषा अ-

कृशी समांतर होईल.

कारण अबक पातळीशीं उघम पातळी समांतर आहे. या दोन समांतर पातळ्यांस अकड पातळी मिळते म्हणून अकडीशीं उघम समांतर आहे.



डफ रेषा उघम पातळीस म स्थळी मिळते. घम साध आणि डई स स्थळीं मिळेपर्यंत वाटीव.

तसेंच घई आणि बड या रेषा एका बडड पातळींत असून अबक आणि उघम समांतर पातळ्यांत आहेत म्हणून घई आणि बड याही समांतर आहेत.

डम ई आणि डकडू सरूप आहेत, तसेंच डुई आणि डुअई सरूप आहेत कारण अकडीशीं उई समांतर आहे.

$$\therefore \frac{उई}{डई} = \frac{ईम}{इक} = \frac{उई}{अई}$$

$$\therefore अई = कई \therefore ईम = उई$$

उघम आणि डबफ, तसेंच उमई आणि डफडू हे त्रिकोण सरूप आहेत. कारण घई रेषा बडडी समांतर आहे.

$$\therefore \frac{उम}{बफ} = \frac{उम}{डफ} = \frac{उम}{इफ}$$

$$\therefore \frac{उम}{ईम} = \frac{बफ}{इफ} = \frac{२}{१} \therefore उम = २ ईम$$

यास्तव म हा उघम त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य आहे. या प्रमाणे अबक पातळीशीं समांतर आणि शंकूच्या ति-

हीं पातळ्यांनीं मर्यादित अशी दुसरी पातळी घेतली, तरी त्या पातळीच्या ज्या बिंदूतून डफ जाईल तो बिंदू तिचा गुरुत्वमध्य होईल.

अबकड शंकू अबक पायाशीं समांतर अशा अनेक पातळ्यांचा बनला आहे. आणि प्रत्येक पातळीच्या गुरुत्वमध्यांतून डफ जाते. यास्तव सर्व शंकूचा गुरुत्वमध्य डफ रेषेत असला पाहिजे.

अकडु त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य ह आहे. ब शिरकोन समजून जर बह सांधिले तर अकडु शीं समांतर आणि अबक, डबअ आणि डबक या पातळ्यांनीं मर्यादित अशा प्रत्येक पातळीच्या गुरुत्वमध्यांतून बह जाईल. तसल्या पातळ्यांचा सर्व शंकू बनला आहे. म्हणून सर्व शंकूचा गुरुत्वमध्य बह रेषेत आहे.

सर्व शंकूचा गुरुत्वमध्य डफ रेषेत आहे आणि बह रेषेत आहे म्हणून डफ आणि बह या रेषा ज्या बिंदूत छेदितील तो शंकूचा गुरुत्वमध्य होईल. त्या रेषाग बिंदूत मिळतात म्हणून ग हा शंकूचा गुरुत्वमध्य होय.

फह सांधे तर फह, बडु शीं समांतर आहे. (यु-पु-६, सि-२) म्हणून बगड आणि गफह त्रिकोण सरूप आहेत.

$$\therefore \frac{\text{गह}}{\text{हफ}} = \frac{\text{बग}}{\text{बड}}$$

$$\frac{\text{हग}}{\text{बग}} = \frac{\text{हफ}}{\text{बड}} = \frac{\text{डफ}}{\text{बइ}} = \frac{१}{३}$$

$$\therefore \frac{\text{हग}}{\text{हग} + \text{बग}} = \frac{१}{४}$$

$$\therefore \frac{\text{हग}}{\text{बह}} = \frac{१}{४} \quad \therefore \text{हग} = \frac{१}{४} \text{ बह}$$

यास्तव हग भाग बहच्या अनुषंगीशा बरोबर आहे. यास्तव शंकूचा पायाचा गुरुत्वमध्य काढून शिरकोनाशीं सांधावा त्या रेषेचा पा-

(१४८)

यापासून चतुर्थांश घ्यावा. त्या स्थळी शंकूचा गुरुत्वमध्य असतो.

(१२) त्रिकोणाकार शंकूच्या चारी कौनबिंदूंवर चार सारख्या वजनाचे पदार्थ ठेविले तर त्यांचा गुरुत्वमध्य आणि शंकूचा गुरुत्व मध्य हे एकच असतील.

अबकड या शंकूच्या अ, ब, क, ड या कौन बिंदूंवर चार सारख्या वजनाचे पदार्थ ठेविले आहेत.

अ, ब, क या तीन सारख्या वजनाच्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य व अबक त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य एकच असतील.

(क.८८ पहा) तो गुरुत्वमध्य फ आहे.

अ, ब, क त्रिकोणी तीन सारखे पदार्थ ठेविले किंवा फ त्रिकोणी एकाच्या तिप्पट वजनाचा पदार्थ ठेविला तरी परिणाम सारखाच होईल.

आतां ड त्रिकोणी एक पदार्थ आणि फ त्रिकोणी त्याच्या तिप्पट वजनाचा पदार्थ यांचा गुरुत्वमध्य काढिला. म्हणजे तोच चारी-कौनांवरील चार सारख्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य होईल.

डफ सांध आणि डफचे ग स्थळीं असे दोन विभाग करकी:-

$$\frac{\text{फग}}{\text{डग}} = \frac{1}{3}$$

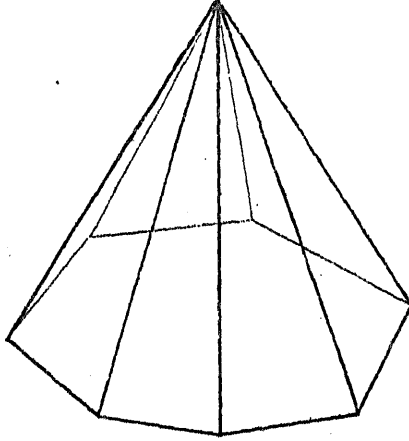
म्हणजे ग हा चार सारख्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य झाला परंतु शंकूचाही गुरुत्वमध्य हाच असतो यास्तव शंकूचा आणि त्याच्या चार कौनांवरील चार सारख्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य एकच असतात.

(१३) ज्या शंकूचा पाया बहुकोणाकृति आहे अशा शंकूचा गुरुत्वमध्य काढणे.

शंकूच्या पायांत एक बिंदु घेऊन तो बिंदु आणि शिरकोन व पायाचे कौनबिंदु सांधिले तर बहुकोणाकार शंकूचे अनेक त्रिकोणाकार शंकु होतील.

प्रत्येक त्रिकोणाकार शंकूचा गुरुत्वमध्य शिरकोन व पाया यां मधील अंतराच्या पायापासून चतुर्थांश अंतरावर पायाशी समांतर अशा पातळीत

असेल. तसेच पायाचा गुरुत्वमध्य आणि शिरकोन यांस सांधणाऱ्या रेषेत सर्व शंकूचा गुरुत्वमध्य असेल. कारण पायाशी समांतर आणि शंकूच्या बाजूनीं मर्यादित अशा अने-



क पातळ्यांचा शंकू बनला आहे. या सर्वांच्या गुरुत्वमध्यांतून पायाचा गुरुत्वमध्य आणि शिरकोन यांस सांधणारी रेषा जाईल. या करितां सर्व शंकूचा गुरुत्वमध्य या रेषेत असेल पाहिजे.

या करितां ही रेषा गुरुत्वमध्य असणाऱ्या पातळीस ज्या ठिकाणी मिळेल तो शंकूचा गुरुत्वमध्य होईल. परंतु ही पातळी पायापासून शिरकोनाच्या अंतराच्या चतुर्थांश अंतरावर आहे म्हणून शंकूचा गुरुत्वमध्य पायाचा गुरुत्वमध्य आणि शिरकोन यांस सांधणाऱ्या रेषेत पायापासून तिच्या चतुर्थांश अंतरावर असेल.

(१४) गोल शंकूचा गुरुत्वमध्य काढणे.

गोल शंकूचा पाया वर्तुळ असतो. वर्तुळ म्हणजे अनंतबाजूंची बहुकोणाकृति आहे. यास्तव वरील सिद्धता येथे ही लागू पडेण. यास्तव गोल शंकूचाही गुरुत्वमध्य पायाचा गुरुत्वमध्य आणि शिरकोन यांस सांधणाऱ्या रेषेत पायापासून तिच्या चतुर्थांश अंतरावर असेल.

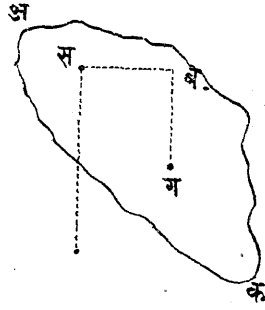
(१५) जर एक पदार्थ एका बिंदूपासून टांगिला व त्या बिंदु भौव-

ती फिरण्यास त्यास मोकळीक असली तर जेव्हां त्या बिंदूतून जाणाऱी दिक् रेषा त्याच्या गुरुत्वमध्यांतून जाईल, तेव्हां तो पदार्थ स्थिर राहील.

अक हा एक पदार्थ आहे व तो स पासून वांगिला आहे. त्याचा ग हा गुरुत्वमध्य आहे. तर सर्व पदार्थांचे वजन गतून जाणाऱ्या ग व दिक् रेषेत कार्य करील म्हणजे पृथ्वीकडे ओढिले जाईल.

स पासून ग व वरलंबकाद.

तो ग व स ब स्थळी मिळतो, असें समज. पदार्थांचे वजन ग व रेषेनें रवाळीं ओढिले जात आहे, व त्यास स बिंदु उलट वर ओढित आहे. आतांचा दोन प्रेरणा समतोल होऊन पदार्थ स्थिर होण्यास त्यांचे कार्य परस्पर उलट-



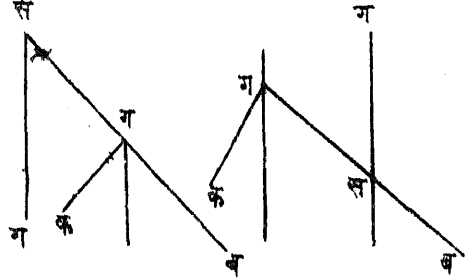
ट दिशांनी एका रेषेत झाले पाहिजे. असें होण्यास ग व रेषास बिंदूतून गेली पाहिजे. म्हणजे ग मधून जाणारी दिक् रेषास मधून गेली पाहिजे. असें झाले म्हणजे पृथ्वीकडे पदार्थ ज्या दिशेनें ओढिला जात आहे त्याच्या उलट दिशेनें स बिंदु पदार्थासि तालून धरील. यास्तव स बिंदुपाशीं पदार्थ वांगिला तर तो वांकडा होऊन जेव्हां स मधून जाणारी दिक् रेषा ग मधून म्हणजे गुरुत्वमध्यांतून जाईल तेव्हां पदार्थ स्थिर राहील.

या सिद्धांतावरूनच कोणत्याही पदार्थाचा गुरुत्वमध्य काढण्याची रीति निघाली आहे ती अशी. पदार्थासि दोन बिंदूपासून वांगिले प्रत्येक वेळीं प्रत्येक बिंदूतून जाणारी दिक् रेषा पदार्थाच्या गुरुत्वमध्यांतून जाईल. यास्तव या दोन रेषा परस्पर ज्या बिंदूत छेदिताल तो बिंदु त्या पदार्थाचा गुरुत्वमध्य होईल.

(१६) जर एक पदार्थ एका बिंदूवर समतोल असला व त्या-

बिंदुवर फिरण्यास मोकळा असला आणि त्या पदार्थास हालविलें तर आधार बिंदूच्या स्वातीं किंवा वर जसा गुरुत्वमध्य असेल त्या प्रमाणें तो पदार्थ मूळ जाग्यावर येईल किंवा फळवेल.

स हा आधार बिंदू आहे. ग हा गुरुत्वमध्य आहे. तो स च्या स्वातीं आहे. अशा स्थितीत जर पदार्थास हालविलें तर ग बिंदूवर



चढेल. समजा कीं, तो ग ठिकाणी गेला. तेथेंही पदार्थाचे वजन ग ब, या दिक् रेषेंत कार्य करील. ग ब या प्रेरणेचें ग अ आणि ग क या प्रेरणांमध्ये पृथक्करण केले, ते असे कीं, ग अ प्रेरणा ग स, रेषेंत कार्य करील. व दुसरी ग क प्रेरणा ग अशी काठकोन करणाऱ्या दिशेंत कार्य करील. ग अ प्रेरणा ग स तोळून धरील आणि पदार्थ ग क रेषेंत मात्र चलन पावेल. चलन काठपर्यंत मिळेल तर ग बिंदू स वन जाणाऱ्या दिक् रेषेंत येईपर्यंत सरेल. साराष गुरुत्व आधार बिंदूच्या स्वातीं असला आणि पदार्थास हालविलें तर गुरुत्वमध्य वर चढतो. व तो पुनरपि आधार बिंदूच्या स्वातीं येण्यास म्हणजे मूळ स्थितीत येण्यास यत्न करितो. आधार बिंदूच्या स्वातीं गुरुत्वमध्य असलेल्या पदार्थास स्थिरावस्थेंतून हालविलें कीं, तो पृथ्वीच्या आकर्षणानें मूळ अवस्थेंत येण्यास यत्न करितो या स्थितीस पदार्थाची स्थिरावस्था म्हणतात.

जर ग गुरुत्वमध्य आधार बिंदूच्या वर असला तर ज्यावेळीं धेटस वर म्हणजे स मधून जाणाऱ्या दिक् रेषेंत ग असेल तेव्हां पदार्थ समतोल राहील.

आतां पदार्थ हालविला तेव्हां गुरुत्वमध्य स्वातीं इतरला.

वून जा
पदार्थ

आहे त्या
गाच्या
ळ.

व बि-
मधून
नें ओ-
न धरी-
ऊन जे-
न जा-

काठ-
न वं-
ग गु-
छेदि-

व त्या-

(१५२)

वर्ग स्थितीत गेला. गंब या दिक् रेषेत पदार्थाचे वजन कार्य करील. गंब या मेरणेचे गंअ आणि गंस या दोन मेरणांत पृथक्करणकेलें तर गंस मेरणेच्या उलट रस आधार बिंदूचे कार्य होईल. परंतु गंअ या मेरणेनें पदार्थ कलंडेल. म्हणजे रस च्या थेटवर ग असतांना ज्या स्थितीत होता ती स्थिति पदार्थ सोडील या स्थितीस पदार्थाची अस्थिरावस्था म्हणतात.

(१७) सपाट पातळीवर पदार्थ ठेविला तर जेव्हां त्याच्या गुरुत्वमध्यांतून जाणारी दिक् रेषा पायांत पडेल तेव्हां पदार्थ उभा असेल. आणि ती रेषा बाहेर पडली तर पदार्थ कलंडेल.

कारण पदार्थाचे वजन गुरुत्वमध्यांतून जाणाऱ्या दिक् रेषेत कार्य करिते, जेव्हां ही रेषा पायांतून जाते, तेव्हां त्यास पायाचा उलट दिशेनें मतिबंध होतो. म्हणून पदार्थ उभा राहतो. जेव्हां ही रेषा पायाच्या बाहेर पडते तेव्हां पदार्थ ज्या दिशेनें रवाळी पडणार त्याच्या उलट त्यास मतिबंध करण्यास कांहीं नसल्यामुळे पदार्थ कलंडतो किंवा पडतो.

उदाहरणे.

(१) एक काठी १ फूट लांब आहे. तिच्या एका टोंकास २ पौंडाचे वस्तुसऱ्या टोंकास ४ पौंडाचे आणि मध्यबिंदूवर ६ पौंडाचे आहेत. तीन वजनें टांगिलीं आहेत, तर त्यांचा गुरुत्वमध्य काढ ?

उ. २ पौंडांच्या वजनापासून ७ इंचावर.

(२) १, २, ५, ७ पौंडांची वजनें अ फूट लांबीच्या काठीस एका टोंकापासून दुसऱ्या टोंकापर्यंत सारख्या अंतरावर टांगिलीं आहेत. तर काठी गुरुत्वशून्य आहे असें कल्पून त्यांच्या गुरुत्वमध्याचे मध्य बिंदुपासून अंतर काढ ?

उ. $\frac{५अ}{२४}$

(१५३)

(३) एक कांब ३ फूट लांबीची आणि ६ पोंड वजनाची आहे. तिच्या एका टोंकास २ पोंडाचे वजन टांगिलेले आहे अशा स्थितीत तिचा गुरुत्वमध्य काढ?

उ. टोंकापासून १ फुटावर.

(४) त्रिकोणाच्या एका बाजूस समांतर काढिलेल्या रेषेने त्रिकोणाचा चौथा भाग कापून टाकिला आहे. तर बाकीच्या तुकड्याचा गुरुत्वमध्य काढ?

उ. $\frac{3}{4}$ अड.

(५) एक त्रिकोणाकार पत्रा तिही कोपऱ्यांखाली राहून तीन मनुष्यांनी उचलिला आहे. तिघांवर कसकसे वजन पडेल.

(६) त्रिकोणाच्या दोन कोनबिंदूंपासून गुरुत्वमध्य सारख्या अंतरावर असेल, किंवा कोनबिंदु व गुरुत्वमध्य यांस सांधणारी रेषा त्या कोनबिंदूच्या समोरच्या बाजूवर लंब असेल, तर तो त्रिकोण समद्विभुज असेल.

(७) १४ फूट लांबीची कांब काढकोनाकार अशी वांकविली आहे की, तिचा १ भाग ८ फूट लांब आहे व दुसरा ६ फूट आहे तिचा गुरुत्वमध्य काढ? उ. सरळ कांबीच्या गु-पासून $\frac{14}{3}$ फूट अंतरावर.

(८) चौरसाच्या जवळजवळच्या दोन बाजूंचे मध्य सांधून जो एका कोपऱ्यास त्रिकोण होतो तो काढून टाकिला तर बाकीच्या आकृतीचा गुरुत्वमध्य काढ? उ. चौरसाच्या मध्यापासून कर्णाच्या $\frac{1}{3}$ अंतरावर.

(९) एका चौरसाच्या एका बाजूवर एक समभुज त्रिकोण काढिला आहे. व तो चौरसाच्या बाहेर आहे तर त्या आकृतीचा गुरुत्वमध्य काढ?

उ. त्रिकोणापासून पायाच्या $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ अंतरावर.

(१०) एक त्रिकोणाकार पत्रा क्षितिजपातळीशी समांतर राहिलेले अ-

(१५४)

सा त्याच्या बाजूच्या मध्यबिंदूपासून तीन सारख्यांनी टांगिला आहे. तर पच्याचें किती वजन असावें म्हणजे त्यावर कोठेंही ८५ शेक-जनाचा मनुष्य पत्रा नकळडतां चालू शकेल?

उ- २५२ शेक.

(११) एक गोल टेबल तीन पायांवर उभें आहे. हे पाय टेबलाच्या परिघांत समभुज त्रिकोणाच्या कोनबिंदूवर आहेत. टेबलाचे वजन १० शेक आहे. टेबल नकळडतां त्यावर कोठेंही अत्यंत केवटें मोठें वजन ठेवितां येईल.

उ- १० शेक.

(१२) त्रिकोणाचा पाया आणि त्याची उंची दिली असता त्यापासून असा त्रिकोण करकीं, तो पायावर क्षितिजपातळीशीं लंब असा दिशेंत स्थिर राहील.

(१३) एकाच कणावर जर अनेक काढकोन त्रिकोण असले तर त्यांचें गुरुत्वमध्य वर्तुळाच्या परिघांत असतील.

(१४) एक त्रिकोणाकार पत्रा त्याच्या एका बाजूनील बिंदूपासून टांगिल्यास त्याची एक बाजू दिक् रेषेंत स्थिर रहावी. तर तो बिंदु कोठें असावा तें काढ?

उ- त्या बिंदूचें स्थान बाजूच्या एका टोंकापासून जितकें लोंबव असेल त्याच्या दुप्पट अंतरावर दुसऱ्या टोंकापासून असतें.

(१५) त्रिकोणाच्या बाजू दुभागून ते बिंदु सांधिले आणि जो त्रिकोण होतो तो त्रिकोणांतून काढून टाकिला तर बाकी आकृतीचा गुरुत्वमध्य आणि सर्व त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य एकच असतात.

प्रकरण ८

साधीं यंत्रे. किंवा यांत्रिकशक्ति.

(१) यंत्र— ज्याच्या सहाय्यानें एका ठिकाणीं लाविलेल्या मेर-
णेच्या हातून दुसऱ्या ठिकाणीं काम करून घेतां येतें, त्यास यंत्र अशी सं-
ज्ञा देतात. यंत्राच्या योगानें नवी शक्ति उत्पन्न होत नाही; परंतु शक्ती-
स एकापदार्थातून दुसऱ्या पदार्थांत नेतां येते, किंवा तिचा फाहीं रू-
पभेद करितां येतो. म्हणजे मेरणा एका ठिकाणीं कार्य करित अस-
ल्यास यंत्राच्या योगानें तिचें कार्य दुसऱ्या ठिकाणीं घेतां येतें. ति-
ची दिशा बदलतां येते. व तिच्या जोरांत ही फेरफार करितां येते.

यंत्राचा उपयोग मुख्यत्वेकरून पदार्थास ढकलण्यास, ओढ-
ण्यास किंवा उचलण्यास करितात. या कामास ज्या साध्या यंत्रांचा
उपयोग करतात. तीं दांडे व दोऱ्या होत. परंतु यंत्रशास्त्रांत अगदीं सा-
धीं अशीं सहा यंत्रे कल्पितात. यांस मुख्य यांत्रिक शक्ति असें हीं
नांव देतात. तीं येणें प्रमाणेः—

- १ उच्चालक.
- २ आंसास खिळलेले चाक.
- ३ कृपी.
- ४ उतरण.
- ५ पाचर.
- ६ मळसूत्र किंवा रू.

(१८) यंत्रस्थितिशास्त्रांत या यंत्रां विषयीं विचार करितांना
ती स्थिर आहेत असें कल्पिलें पाहिजे; म्हणजे यंत्रास एका वि-

(१५६)

काणी प्रेरणा लाविली असता ती त्या यंत्रास दुसऱ्या ठिकाणी लव
विलेल्या प्रेरणेने समतोल राहिल. या ज्या दोन प्रेरणा त्यांमध्ये भेदश-
स्वण्याकरिता त्यांपैकी एकीस शक्ति व दुसरीस वजन अशीं नांवें दे-
ऊं. तसेंच यंत्राच्या गणितरूप विचारांत त्याचे अवयव घर्षण व्यतिरि-
क्त आणि केवळ ताठ आहेत, त्यांच्या आंगीं वजन किंवा जडता ना-
हीं, त्यांस लाविलेल्या दोऱ्या अगदीं नरम आहेत आणि यंत्राच्या
चलनास हवेचा प्रतिबंध होत नाही असें साधारणतः धरितात.
आणि जेव्हां यांपैकी कोणाचा सुद्धा उद्धेस्व केलेला नसेल, ते-
व्हां असेंच समजावयाचें आहे.

(११) जेव्हां यंत्रानें थोड्या शक्तीने मोठें वजन उचललें जा-
ईल, तेव्हां त्या यंत्रापासून फायदा होईल. त्यास यांत्रिकस्वार्थ
अशी संज्ञा देऊं. तो स्वार्थ वजन आणि शक्ति यांमधील प्रमाण आहे,
म्हणजे वजनास शक्तीनें भागून जो भागाकार येईल तो यांत्रिक स्वार्-
थ होईल. म्हणजे जर विवक्षित यंत्रानें १ शेराच्या शक्तीनें १५ शेरां-
चें वजन तोलून धरिलें असेल तर त्या यंत्राचा यांत्रिकस्वार्थ १५ होईल.

ज्यापेक्षां मागे प्रेरणांच्या कार्याविषयी व अनेक प्रेरणांच्या
कार्यापासून समतोलत्व राहण्यास कोणत्या गोष्टी अवश्य लागतात. या
विषयी आणि गुरुत्वमध्याविषयी यथास्थित विवेचन केले आहे, त्या-
पेक्षां आतां यंत्राच्या समतोलत्वाविषयी नियम काढण्यास फारसें क-
ठीण जाणार नाही.

उच्चालक.

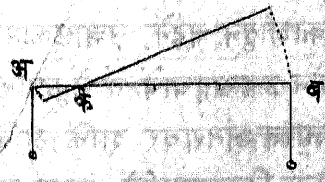
(१००) सर्व यंत्रांत उच्चालक हें फारसाधें यंत्र आहे.

एका स्थिर बिंदूवर फिरता असा दांडा किंवा गज असला म्ह-
णजे त्यास उच्चालक म्हणतात. ज्या स्थिर बिंदूवर किंवा आधा-
सवर दांडा फिरतो त्यास त्या उच्चालकाचा टेंकू असे म्हणतात आणि

या टेंकूने उच्चालकाचे जो दोन भाग झालेले असतात त्यांस उच्चालकाच्या भुजा असें नांव देतात. जेव्हां या दोन्ही भुजा एका सरळ रेषेत असतात तेव्हां त्यास सरळ उच्चालक म्हणतात आणि जेव्हां दोन्ही भुजा एका सरळ रेषेत नसतात तेव्हां त्या उच्चालकास बांकडा उच्चालक असें म्हणतात. ज्या पातळीत टेंकू भोवती उच्चालक फिरू शकतो त्या पातळीस उच्चालकाची पातळी असें म्हणतात आणि ज्या प्रेरणांचे उच्चालकावर कार्य होते त्या प्रेरणा या पातळीत कार्य करतात असें समजावयाचें आहे.

(१०१) उच्चालकांत उच्चालक शक्ति, उच्चाल्यपदार्थ आणि टेंकू या तिहींचा विचार कर्तव्य असतो. जी शक्ति उच्चाल्यपदार्थास उचलिते किंवा आधार देते ती उच्चालक शक्ति होय. जें वजन किंवा जो पदार्थ या शक्तीने उचलिला जातो तो उच्चाल्यपदार्थ होय. या दोन्ही प्रेरणाच आहेत, परंतु त्यांत कांहीं भेद दाखविण्याकरितां उच्चालक प्रेरणेस उच्चालक शक्ति किंवा शक्ति आणि उच्चाल्यपदार्थास वजन अशीं नांवे देऊं.

(१०२) अथ या उच्चालकाच्या अक, बक भुजा क टेंकू भोवती फिरतात. अक भुजेच्या लांबीच्या तिप्पट बक भुजेची लांबी आहे. तर क भोवती अ टोंकाच्या फिरण्यानें जेवढें वर्तुळ किंवा जेवढा वर्तुळ केंद्र होईल, त्याच्या तिप्पट परिघाचें वर्तुळ किंवा तिप्पट लांबीचा वर्तुळ केंद्रस क भोवती बच्या फिरण्यानें होईल. म्हणजे अ टोंक जेवढ्या अवकाशांत वून क टेंकू भोवती फिरेल त्याच्या तिप्पट अवकाशांतून ब टोंक क भोवती फिरेल. अ टोंकाच्या तिप्पट ब टोंकाचा क भोवती फिरण्याचा वेग असेल. कारण क पासून ब चें अंतर जास्त असल्यानें त्या-

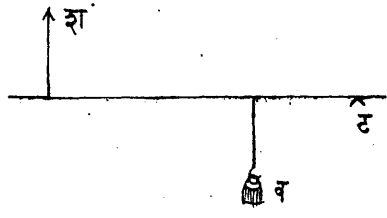


क टेकूपासून अंतर कअ, कब हातील व कअ, कब हेच क सो-
 वती फिरण्याचे त्यांचे आंस होतील. यास्तव मेरणा यांच्या प्रमाणांत अ-
 सतील. जर उच्चालक सरळ नसेल आणि मेरणा हव्या त्या दिशांनी कार्य
 करित असतील तर मेरणांच्या कार्यदर्शक रेषांवर टेकूपासून जे लंब त्यां-
 च्या प्रमाणांत मेरणा असतील. परंतु ही प्रमाणे उलट असतील. म्हणजे जी
 मेरणा टेकूजवळ असेल ती मोठी व लांब असेल ती लहान अशा अ-
 सतील. म्हणून उच्चालकानें यांत्रिक स्वार्थ मिळविण्याकरितां टेकूपासून
 जास्त अंतरावर शक्ति लावून थोड्या अंतरावर मोठें वजन उचलिताना
 वास्तविक दोहों मेरणांचें उच्चालक किंवा काम सारखेंच होतें. कमी जो-
 राची शक्ति जास्त अवकाशांतून चलन पावते आणि मोठें वजन थो-
 ड्या अवकाशांतून चढतें. उच्चालकापासून यांत्रिक स्वार्थ प्राप्त होण्या-
 स जें वजन उचलवयाचें तें टेकूपासून जितक्या अंतरावर असेल
 त्याहून जास्त अंतरावर शक्ति लाविली पाहिजे. जितक्या पटीनें हे
 अंतर असेल तितक्या पटीनें वजन उचलले जाईल; आणि जर वज-
 न टेकूपासून जास्त अंतरावर असून शक्ति टेकूजवळ लाविली अ-
 सेल, तर नसल्या उच्चालकापासून यांत्रिक स्वार्थ काहीं होणार ना-
 हीं.

(१०३) उच्चालकशक्ति, उच्चालकवजन आणि टेकू यांच्या स्थान
 नभेदेंकडून उच्चालकाचे तीन वर्ग कल्पितात.

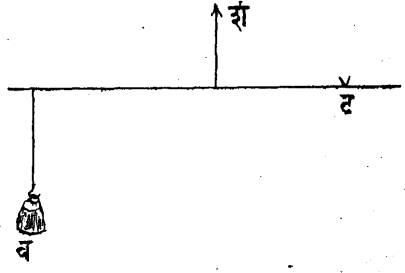
उच्चाल्य वजन टेंकूजवळ म्ह-

णजे टेंकू आणि शक्ति यांच्या मध्ये असते म्हणून यांत टेंकूपासून शक्ति सर्वदां जास्त अंतरावर असते व या पासून सर्वदां यांत्रिक स्वार्थ मास होतो.



तिसऱ्या प्रकारच्या

उच्चालकांतही उच्चालकशक्ति आणि वजन टेंकूच्या एकाच भागास कार्य करितात. पण शक्ति टेंकूच्या जवळ म्हणजे टेंकू आणि वजन यांच्यामध्ये असते. यांत शक्ति सर्वदां वजनापेक्षां टेंकूपासून कमी अंतरावर असते म्हणून या प्रकारच्या उच्चालकापासून यांत्रिकस्वार्थ कधीच होत नाही.

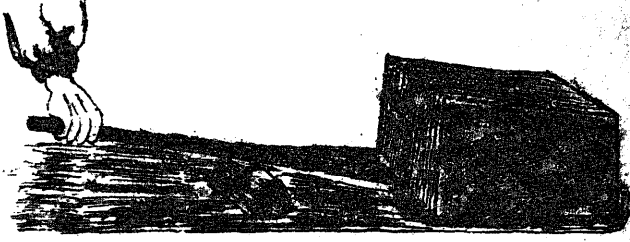


(१०५) मोठें वजन किंवा दगड उचलण्यास किंवा सोडवि-

ण्यास पहारेचा किंवा मोठ्या दांड्याचा उपयोग आपण करितों त्यास तरफ म्हणतात. हे पहिल्या वर्गाच्या उच्चालकाचें उदाहरण होय. जें वजन उचलवयाचें तें एका टोंकास असते, व दुसऱ्या टोंकावर हाता-

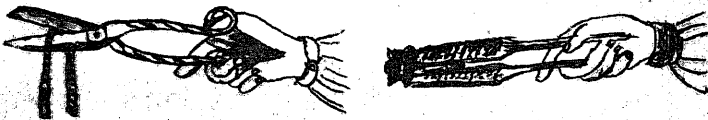
(१६०)

में दाबितों ती उच्चालक शक्ति असते. आणि पहारीरवाली या दोहोंच्या मध्ये जो दगडाचा किंवा लांकडी तुकड्याचा आधार देतो तो टेंकू होय.



य. तसेच शेगडीच्या काठावर टेंकून उलथल्यानें निरवारें सारितों तें-
ही याच वर्गाच्या उच्चालकाचें उदाहरण होय. तसेंच भट्टीतील कोळसेचा
रण्याकरितां जी लोखंडाची शींग घेतात ती याचेंच उदाहरण होय. यां-
त जितकी शक्ति टेंकूपासून लांब असते तितकें मोठें वजन उचलितों ये-
ते. तसेंच पाण्याचा बंब चालविण्यास जी दांडी असते, तोही पहिल्या
वर्गाचा उच्चालक होय. तसेंच काव्या, गाव्या, साडशी, चिमटे इत्यादिह-
त्यारें या वर्गातील जोड किंवा दुहेरी उच्चालकांचीं उदाहरणें होत.

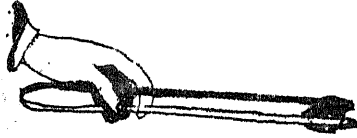
दुसऱ्या वर्गांतल्या उच्चालकांची उदाहरणें व्यवहारांत फार आ-
ढळत नाहीत. होडीचें आवलें हें दुसऱ्या प्रकारच्या उच्चालकाचें उदा-
हरण होय. होडी हें वजन, हातानें आवलें मारतो ती शक्ति, आणि त्या-
चें चपटें पातें पाण्यावर टेंकलेलें असतें तो टेंकू होय. बिजागराचें दा-
र लावणें उघडणें, आडकित्याव त्या प्रकारचीं दुसरीं कापण्याचीं यंत्रें



व आगगाडीवरील गट्टे गाडींत नेण्याच्या एकचाकी गाड्या इत्यादि
दुसऱ्या वर्गाच्या उच्चालकांचीं उदाहरणें होत.

(१०५.) तिसऱ्या वर्गाच्या उच्चालकांत कांहींच यांत्रिक स्वार्थ नस-

व्यासुळे त्याची उदाहरणे म्हासंत याहूनही कमी आढळतात. शक्तीपेक्षांके-
बद्ध जलदी काम करण्याची अपेक्षा असते तेथे माच या मकारच्या उच्चार-
काचा उपयोग करितात. याचे सर्वा साधारण उदाहरण म्हणजे मनुष्याचा बा-
हू होय. दुसरे अवयव मांड्या बोटे वगैरे ही याचीच उदाहरणे होत. बाहू
मध्ये खांद्यांत किंवा कोंपरांत ज्या साकाऱ्यांत हाड खिळलेले आहे तो
टेंकू, याटेंकूच्या हाडांस खिळलेले जे स्नायु व ज्यांच्या योगाने आपण
हात हालवितो व वजन उचलितो ती शक्ति, आणि सर्ष बाहु व हातात
जे वजन असेल ते वजन होय. कानण्याचा चरक किंवा भाता पाचाने फि-
रविण्यास जी योजना असते ती याच वर्गातील उच्चारकाचे उदाहरण हो-
य. ज्या विजागरीने जमिनीस किंवा
खोळीस अडकविलेला असतो तो टें-
कू, वर खांदी करण्याकरिता पाचाने वा-
बतो ती शक्ति, जो चरक फिरतो किंवा
जी हवा सोडतो ते वजन होय. सोनारा-

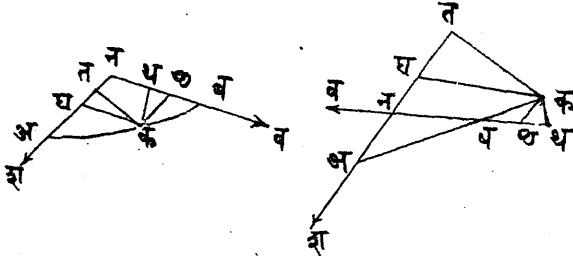


चा चिमटा हे याचेच उदाहरण होय.

() उच्चारकावर मुख्यत्वे दोन भेरणा कार्य करतात. या-
दोन भेरणांच्या कार्याने उच्चारक टेंकूवर समतोल राहिला पाहिजे; या
दोन भेरणांनी उच्चारक टेंकूवर समतोल राहण्यास भेरणांची परिणा-
मी भेरणा टेंकूतून गेली पाहिजे; आणि दोहों भेरणांच्या कार्याच्या किं-
वा यांच्या परिणामी भेरणेच्या कार्याच्या बरोबरीचे कार्य उलट दिशेने
करण्याजोगी भेरणा टेंकूने लाविली पाहिजे. टेंकू हा दोहों भेरणांच्या
परिणामी भेरणेतील बिंदु आहे म्हणून या बिंदुसमोबतातची दोहों भे-

रणांचीं भ्रामकत्वें समान असलीं पाहिजेत. उच्चाळकावर कार्य करणाऱ्या प्रेरणा परस्पर समांतर दिशेत कार्य करोत किंवा ह्या त्या दिशांनी कार्य करोत. या प्रेरणा दोनच असोत किंवा अनेक असोत. टेकूच्या बिंदूच्या दोहोंकडील प्रेरणांचीं भ्रामकत्वें समान असतील, तर उच्चाळक टेकूवर समतोल राहिल. टेकू भोंवतालची त्याच्या दोहोंकडील प्रेरणांचीं भ्रामकत्वें समान असण्यास काय गोष्टी अवश्य असाव्या लागतात हे काढिले म्हणजे उच्चाळकाच्या समतोलत्वाविषयींचा नियम निघाला.

() जेव्हां उच्चाळक समतोल असतो तेव्हां शक्ति आणि उच्चाळकजन त्यांच्या कार्य करणाऱ्या दिशांवर टेकूपासून काढलेल्या लंबांच्या लुप्तप्रमाणांत असतात तेव्हां उच्चाळक समतोल असतो.



अकव किंवा अवक हा एक उच्चाळक आहे क हा टेकू अथ हे, अ आणि व या दोन प्रेरणा अ आणि व ठिकाणी कार्य करितात. आणि त्यांनी उच्चाळक समतोल आहे. अ आणि व यांची परिणाम प्रेरणा न स्थळी कार्य करते असे कल्पू. ज्यापेक्षा उच्चाळक या प्रेरणांनी क टेकूवर समतोल आहे. त्यापेक्षा यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा क मधून गेली पाहिजे. म्हणून नक ही रेषा अ आणि व यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा असली पाहिजे.

कपासून कथ आणि कघ, नध आणि नव यांशी समांतर काढकत आणि कथ हे अ आणि नव यांवर लंब काढ. प्रेरणा समांतर भुज चौकोनाच्या सिद्धांता प्रमाणेः—

(१६३)

श कथ
व कघ

कथ थ आणि कत घ हे त्रिकोणसरूप आहेत.

कथ कथ
कघ कत

श कथ बकभु (कबध)
व कत अकभु (कअत)

मूणजे शक्ति व वजन त्यांच्या कार्य करण्याच्या दिशांवर देवूपा
सून काढलेल्या लंबांच्या व्युत्क्रम प्रमाणांत आहेत.

जर श कथ
व कत असेल आणि श आणि व घेरेणा उच्चा-

लकास परस्पर उलट दिशांनी फिरवितील तर श आणि व या घेरे-
णा उच्चालकास समतोल ठेवितील.

कारण श कथ कथ
व कत कघ

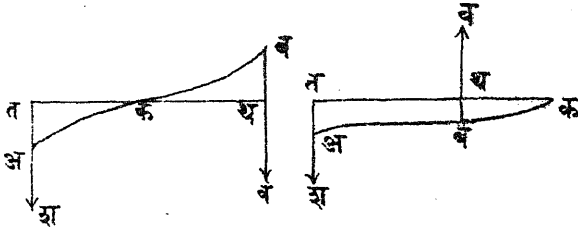
या करितां नक रेखा श आणि व या घेरेणांच्या परिणामी
घेरेणेची कार्य करण्याची दिशा आहे, आणि ज्यापेक्षां परिणामी घेरे-
णा क मधून जाते त्यापेक्षा त्यांनीं क वर उच्चालक समतोल राहिल.

() वरील कलमांत शक्ति व वजन यांच्या कार्य कर-
ण्याच्या दिशा परस्पर मिळतात असें कल्पिलें, त्या परस्पर मिळत
नसून समांतर असतील, आणि त्यांनीं उच्चालक समतोल असेलत-
री वरील सिद्धांत खरा असतो.

अकब किंवा अबक उच्चालक असून त्याचा क हा देवूआ-
हे. श आणि व, थ आणि व बिंदुस्थळीं समांतर दिशांनीं कार्य क-
रितात, व उच्चालकास समतोल ठेवितात.

क मधून घेरेणांच्या दिशांशीं लंब अशी रेखा काढ. ती त्यांस

(१६४)



त आणि थ ठिकाणी मिळते. श आणि व या समांतर मेरणांची परिणामी मेरणा यांशी समांतर असेल आणि तिच्या कार्य करण्याच्या बिंदूची यांपासून अंतरें यांच्या व्युत्क्रमणांत असतील. क टेकूवर ज्यापेक्षा उच्चालक समतोल आहे त्यापेक्षा कतून परिणामी मेरणेची दिशा जाते.

$$\frac{श}{व} = \frac{कथ}{कत}$$

जर $\frac{श}{व} = \frac{कथ}{कत}$ असेल आणि श आणि व मेरणा उच्चालकास परस्पर उलट दिशांनी फिरवितील तर, त्या उच्चालकास समतोल ठेवितील. कारण- $\frac{श}{व} = \frac{कथ}{कत}$ आहे, म्हणून श आणि व मेरणांची परिणामी मेरणा क मधून जाते, यास्तव उच्चालक यांनी समतोल राहिल.

यावरून हे उघड आहे की, उच्चालकाच्या समतोलत्वाची साधारण सारणी अशी आहे.

$$\frac{श}{व} = \frac{कथ}{कत} ; \text{ किंवा } श \times कत = श \times कथ.$$

यांत कत हा शक्तीच्या कार्यमार्गावरील टेकूपासून काढलेला लंब आहे आणि कथ हा वजनाच्या कार्यमार्गावर काढलेला लंब आहे. म्हणून शक्ति व तिच्या कार्यमार्गावर टेकूपासून काढलेला लंब यांच्या गुणाकाराबरोबर वजन आणि त्याच्या कार्यमार्गावरील टेकूपासून काढलेला लंब यांचा गुणाकार असला पाहिजे. टेकूपासून

शक्ति आणि वजन यांच्या कार्यमागीर काढलेल्या लंबास Δ आणि ∇ नावे देऊन म्हणजे सारणी अशी होईल.

$$\Delta \times \Delta = \nabla \times \nabla$$

उच्चालकाचे वजन न कल्पिलेले आणि त्याच्या कार्य करणाऱ्या दिशेवरील टेंकूपासून लंब न कल्पिला तर ते Δ बरोबर किंवा ∇ बरोबर कार्य करील, त्या प्रमाणे त्याचे भामकत्व मिळवावे लागेल म्हणजे-

$$\Delta \times \Delta + \nabla \times \nabla = \nabla \times \nabla, \text{ किंवा } \Delta \times \Delta = \nabla \times \nabla - \nabla \times \nabla$$

() उच्चालकाच्या टेंकूवरील एकंदर दाब काढणे.

उच्चालकावर कार्य करणाऱ्या प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेबरोबर टेंकूवर एकंदर दाब असेल हे उघड आहे. कारण टेंकू सर्वा उच्चालकास तोलून धरितो, म्हणून शक्ति आणि वजन यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या बरोबरीची व उलट दिशेने कार्य करणारी प्रेरणा टेंकूच्या सहाय्याने प्राप्त होते. शक्ति आणि वजन परस्पर समांतर आणि सरूप प्रेरणा असल्या तर टेंकूवरील दाब त्यांच्या बेरजेबरोबर असेल, विरूप म्हणजे विरुद्ध दिशांनी कार्य करणाऱ्या असल्या तर त्यांची परिणामी प्रेरणा समांतरभुज त्रिकोणाच्या रीतीने काढिता येईल.

प्रेरणा समांतर असल्या तर टेंकूवरील दाब

$$\text{पाहिल्या वर्गाच्या उच्चालकात} \dots \Delta + \nabla$$

$$\text{दुसऱ्या } \dots \nabla - \Delta$$

$$\text{तिसऱ्या } \dots \nabla - \Delta$$

उच्चालकाचे वजन हिशेबांत धरिल्यास ते शक्तीच्या दिशेने किंवा विरुद्ध दिशेने कार्य करित असेल त्या प्रमाणे शक्तीत मिळवावे, किंवा वजा करावे. जर उच्चालकाचे वजन न कल्पिलेले तर टेंकूवरील दाब:-

$$\text{पाहिल्या वर्गाच्या उच्चालकात} \dots \nabla + \Delta$$

$$\text{दुसऱ्या } \dots \nabla - (\Delta + \nabla)$$

(१६६)

तिसऱ्या ॥ ॥ ... (प± व) - व.

() तराजू - उच्चालकाचा पदार्थाची वजनं करणयास उपयोग करितात व या स्थितीत त्यास तराजू असे म्हणतात. याच्या उपयोगाप्रमाणे यास ताजचा, तागडी, धट अशींही नांवे देतात. याचा टेंकू शक्ति आणि वजन यांच्या मध्ये असतो. म्हणून हा पहिल्या प्रकारचा उच्चालक होय. याच्या दोनही भुजा समान असतात व दांडीच्या दोहों टोंकास, दोन पारडीं टांगिलेलीं असतात. याचा टेंकू दांडीच्या थेट गुरुत्वमध्यावर नसून त्याच्यावर असतो. तागडीची दांडी उच्चलण्यास लाविलेल्या दोरीचा शेवट किंवा ताजच्याच्या मधल्या कांट्याचे टोंक हीं नेहमी दांडीच्यावर म्हणून दांडीच्या गुरुत्वमध्याच्या वर असतात. यास्तव दांडी, पारडीं आणि त्यांतील वजनं या सर्व समूहाच्या गुरुत्वमध्यापासून बराच वर टेंकू असेल कारण या सर्व समूहाचा गुरुत्वमध्य दांडीच्या गुरुत्वमध्याहूनही रवाळीं असेल. ज्या पदार्थाचे वजन काढावयाचे असेल. त्यास एका पांरड्यांत घालतात, आणि दुसऱ्या पारड्यांत वजनं घालतात. ज्या वजनाने तराजूची दांडी अगदीं समतोल म्हणजे क्षितिज पातळीशीं समांतर अशी राहते, ते त्या पदार्थाचे वजन असते. कारण भुजा समान व दांडी क्षितिजपातळीशीं समांतर म्हणजे पदार्थ व वजनं ज्या दिशेने कार्य करितात, त्या दिशांशी लंब असतात म्हणून दोनही भेरेणा समान असल्या शिवाय समतोलत्वच राहणार नाही. आणि दांडी हालळी तरी कांहीं हेलकवे रवाळून (गुरुत्वमध्यावर टांगण्याचा बिंदु असल्यामुळे), स्थिर होईल, आणि त्यावेळीं दांडीतून जाणाऱ्या क्षितिजाशीं समांतर अशा पातळीशीं कांहीं अंशांचा कोन करील. हा कोन ज्या प्रमाणे लहाप मोठा होईल. त्यावरून तराजूची सूक्ष्मता मापितां येईल.

जेव्हां दुसऱ्या पारड्यांतील वजनावरून पदार्थाचे तितकें वजन आहे हे सांगतों, तेव्हां उच्चालकाच्या म्हणजे येथे तराजूच्या भुजा सार-

रव्या लांबीच्या असून पारडीं रिकामी असतांनाही दांडी समतोल असते असें समजतो. या प्रमाणें तराजू आहे किंवा नाही हे, वजनं पाहिल्या पारड्यांत आणि पदार्थ दुसऱ्या पारड्यांत घालून समतोलत्व राहते किंवा नाही हे पाहिल्यानें समजते. यास्तव भुजा सारख्या लांबीच्या असल्या आणि पारडीं रिकामी असतां दांडी समतोल राहिली म्हणजे तो तराजू खरा आहे असें समजावें. आणि अशी दांडी समतोल न राहिली तर तो तराजू खोटा असें समजावें

() चांगला तराजू करिताना सुरव्यत्वे तीन गोष्टींकडे लक्ष दिलें पाहिजे.

(१) पारडीं रिकामी असतां किंवा त्यांत सारखी वजनं असतांना तराजूची दांडी क्षितिज पातळीशीं अगदीं समांतर रहावी, म्हणजे तराजू खरा असावा.

(२) तराजूच्या पारड्यांतील वजनांत यत्किंचित फरक असला तरी तराजूवरून तत्काळ समजावा, म्हणजे तराजू सूक्ष्म असावा.

(३) तराजूची दांडी समतोल असतां ह्यालबिली तर तत्काळ पुनः समतोल स्थितींत स्थिर व्हावी. म्हणजे तराजू स्थायी व्हावा.

() तराजू चांगला होण्यास ज्या अवश्य गोष्टी त्याकड्या परिपूर्ण होताना तें काढणें.

मागील विवेचनांत तराजूच्या दांडीचे वजन हिशेबांत धरिलें नव्हतें. तर तें आतां हिशेबांत धरून व पारडीं वतीं दांडीस टांगण्यास लाविलेल्या दोऱ्या किंवा सारख्या यांची वजनं हीं हिशेबांत धरून हा सिद्धांत सिद्ध करूं.

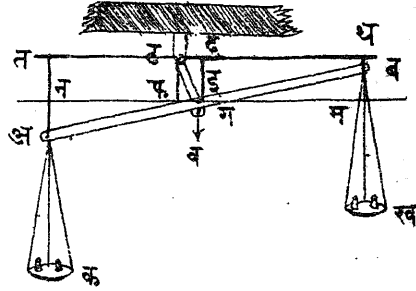
अब ही तराजूची दांडी आहे ट हा तिचा टेकू किंवा आधार बिंदु आहे.

* दांडी एका दोरीनें दांगिली असेल तर दोरीचा शेवटचेकू किंवा आधार बिंदु होईल. आणि मध्यें फिरताकांठा असून त्यास भोवती चौकट असून तिनें दांडी दांगिली असली तर कात्यांचें शेंक

(१६८)

अब = २ ल. आणि तराजूची प्रत्येक सुजा ल. लांबीची आहे. अ आणि व या बिंदुस्थळीं दांडीस पारडीं टांगिलीं आहेत.

या दोन बिंदुंस सांधणाऱ्या रेषेपासून ट टेंकूचें अंतर हू आहे. दांडीचें वजन व आहे; दांडीच्या ग गुरुत्वमध्याचें ट पासून अंतर डू आहे. ट पासून अब वर जो लंब अ-



सेल त्या लांबांत ग गुरुत्वमध्य असतो वतो तसा आहे असें कल्पूं. प्रत्येक पारडें व त्यास लाविलेल्या दोऱ्या वगैरे यांचें वजन प आहे अणि क, ख, वजनं अ आणि ब टांकास लाविलेल्या पारड्यांत आहेत. दांडीचें वजन, अ व ब बिंदुंस टांगिलेलीं क + प आणि ख + प वजनं ग, अ, ब बिंदुपासून टिकूरेपंत कार्य करितील. क, ख वजनं समान नसतांना तराजू समतोल स्थितींत येतो तेव्हां त्याची दांडी क्षितिजपातळीशीं कोन करिते. ज्यापेक्षां ट टेंकूचें तराजू समतोल आहे, त्यापेक्षां ट सभोंवतालच्या वजनाच्या आमकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहिजे. खचें आमकत्व धन धरितें तर क आणि व यांचीं आमकत्वं ऋण व धन होतील. क + प च्या कार्य करण्याच्या दिशेवरील ट पासून काढलेला लंब टत आणि व आणि ख + प यांच्या दिशावरील लंब टद आणि टथ आहेत म्हणून.

$$(ख + प) टथ - (क + प) टत + व \times टद = ०$$

अब बिंदुंस सांधणाऱ्या रेषेस तिजवरील ट पासून का-

हेतू किंवा आधारबिंदु दर्शवील.

दलेला लंब इ विकर्णां मिळतो. इ तून क्षितिजाच्या पातळीशीं समांतर
रेषा काढ. ती क आणि रव यांच्या दिशांस न आणि म विकर्णां मिळते.
ट पासून नइमवर टफ लंबकाढ.

तर अइ = इब = लुइइ = ह; टग = ड आणि नइअ = थ.

टत = नफ = नइ - फइ = ल, कोभु(थ) - हकोभु(टइफ) =

= लकोभु(थ) - हभु(थ).

दथ = मफ = मइ + इफ = लकोभु(थ) + हभु(थ).

टद = डभु(टगद) = डभु(थ)

टत, दथ आणि टद यांच्या या किमतीवरील सारणींत लिहून.

(रव + प) (लकोभुथ + हभुअ) - (क + प)(लकोभुथ - हभुथ)

+ वड भुथ = ०

भुथ((क + रव + २प) ह + वड) = कोभुअ(क - रव) ल.

भुथ = स्व. थ = $\frac{(क - रव) ल.}{(क + रव + २प) ह + वड}$

कोभुथ

ही समतोलत्वाची साधारण सारणी झाली.

(१) जेव्हा क = रव असेल तेव्हा स्प. थ = ० होईल म्हणजे
दांडी क्षितिजपातळीशीं समांतर स्थिर राहील. याचा अर्थ तराजू स्वरा
असेल. यास्तव पहिली अवश्यक गोष्ट परिपूर्ण होण्यास तराजूच्या
भुजा सारख्या असाव्या आणि दांडीचा गुरुत्वमध्य तेंकूपासून दां-
डीवरच्या लंबांत असावा.

(२) जेव्हा क आणि रव यांमधील अंतर नियमित असेल,
तेव्हा स्प थ याची किंमत जशी मोठी होईल. त्याप्रमाणे तराजूची सू-
क्ष्मता वाढेल. क - रव याची नियमित किंमत असतां स्प थ याची
किंमत वाढण्यास (क - रव) चा छेद म्हणजे (क + रव + २प) ×
ह + व ड याची किंमत होईल तितकी कमी झाली पाहिजे. त-
सेंच जर स्प थ याची किंमत नियमित असली म्हणजे दांडी नि-

(१७०)

यमितकोनांतून झुलत असली तर क-रव याची किंमत जितकी लहान
न असेल त्या प्रमाणे त्या धोड्या अंतरास, नियमित कोन मोग हो-
ईल. म्हणजे तराजूची सूक्ष्मता जास्त होईल. या करितां क-रव या-
ची किंमत कमी होऊन स्प. ७ याची किंमत नियमित राहण्यास
क-रव याच्या छेदाची म्हणजे $(क+रव+३प) \times \frac{१}{१०} + व \frac{१}{१०}$
याची किंमत कमी झाली पाहिजे. यास्तव तराजूस सूक्ष्मता येण्यास
 $(क+रव+३प) \frac{१}{१०} + व \frac{१}{१०}$ याची किंमत होईल तितकी कमी
असली पाहिजे.

(३) समतोलत्वापासून तराजू हालविल्या असतां पुनः समतो-
ल स्थितींत आणणाऱ्या ज्या घेरणा त्यांचें भ्रामकत्व ज्या प्रमाणें
जास्त असेल त्या प्रमाणें तराजूचें स्थायित्वही जास्त असेल.

घेरणांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज:-

$(क+रव+३प) ह+वड) भु-७ - (क-रव) लको. भु. ७.$

जर क = रव असेल तर भ्रामकत्वांची बेरीज:-

$(क+रव+३प) ह+वड) भु-७.$

या करितां तराजूस स्थायित्व येण्यास याची किंमत होईल ति-
तकी जास्त असली पाहिजे. परंतु वर सांगितले कीं, तराजूच्या चां-
गलेपणाची दुसरी आवश्यकता परिपूर्ण होण्यास याची किंमत होई-
ल तितकी कमी असली पाहिजे. या दोहोंचा विरोध येतो परंतु $(क+
रव+३प) ह+वड$ याची आणि लू याची अशा दोहोंच्या
किंमती वाढविल्यानें दोनही गोष्टी परिपूर्ण होतात. म्हणजे भुजांची
लांबी लू वाढवून आणि टेकूचें दांडीपासून आणि तिच्या गुरुत्वमध्या
पासून अंतर वाढवून तराजूची सूक्ष्मता आणि स्थायित्व दोन्ही वाढ-
वितां येतात.

(११३) तराजूच्या स्थायित्वापेक्षां साधारणत्याची सूक्ष्मता जा-
स्त महत्वाची असते. कारण तराजूस समतोल स्थितीतून हालविलें अ-

सतां त्याचे दोहोंबाजूंस वर स्यालीं सारखेच हे लक्षावे होतात किंवा नाही, म्हणजे तराजूची दांडी क्षितिजपातळीशीं समांतर स्थितीत स्थिर होते किंवा नाहीं हे डोळ्यांनीं चांगले समजतें व त्या प्रमाणें वजनांत फेरफार करितां येतो. यास्तव व्यवहारांत स्थायित्वाचा विशेष विचार न करितां तराजूस सूक्ष्मता आणण्याचीच योजना करितात. दुः अंतर लहान ठेवितात. आणि ह् तर फारच लहान ठेवितात. वस्तुतः ह् अंतर सूक्ष्म असतें किंवा अत्यंत लहान असतें.

(११४) रवोऽस्या तराजूनें पदार्थाचें स्वरे वजन काढणें.

समजाकीं, पदार्थाचें स्वरे वजन क्ष आहे. रवोऽस्या तराजूच्या भुजा अ आणि ब आहेत. जेव्हां पदार्थ अ भुजेच्या पारड्यांत घातला तेव्हां त्याचें वजन व भरले तर-

$$\therefore \text{क्ष} \cdot \text{अ} = \text{व} \cdot \text{ब}$$

ब भुजेच्या पारड्यांत घातला तेव्हां त्याचें व वजन भरले तर-

$$\text{क्ष} \cdot \text{ब} = \text{व} \cdot \text{अ}$$

या दोहों समीकरणांचा गुणाकार करून.

$$\text{क्ष} \cdot \text{अ} \cdot \text{ब} = \text{अ} \cdot \text{ब} \cdot \text{व} \cdot \text{व}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \text{व} \cdot \text{व}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \sqrt{\text{व} \cdot \text{व}}$$

म्हणून स्वरे वजन दोहों रवोऽस्या वजनांचे सूमिति मध्य प्रमाण असतें.

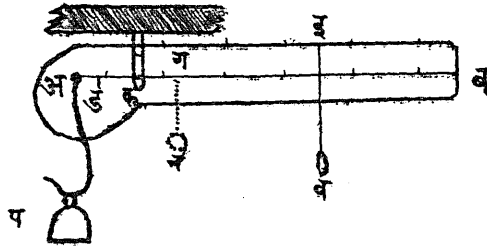
(११५) वजन करण्याच्या दांड्या—दुसऱ्या प्रकारचे तराजू असतात त्यांत त्यांच्या भुजा समान नसतात, आणि एकाच वजनानें निरनिराळ्या वजनांच्या पदार्थांची वजनें काढितां येतात. यांस दांड्या म्हणतात. दांडीचे भागपाळून त्यांवर कित्येकांत वजन सारतात आणि कित्येकांत देकू सारतात. असल्या दोन प्रकार-

च्या दांड्यांविषयी सांगते।

(११६.) वजन करण्याच्या साध्या दांडीचे वजन सारण्याचे भाग पाडणे।

साधी दांडी टेकूच्या एका बाजूस बारीक व लांब आणि दुसऱ्या बाजूस जाड व आरबूड असते. आरबूड भुजेस वजन दांगण्याचा जांकडा असतो किंवा पारडे असते. बारीक व लांब भुजेवर छेद पाडलेले असतात. त्यावरून एक नियमित वजन भडकविलेले कंकण पुढे मागे सारता येते व कोणत्या छेदावर ते वजन सारले असले त्यावरून वजन समजते.

अब एक दांडी आहे, तिचा क हा टेकू आहे. अ ठिकाणी ज्याचे वजन करणे तो पदार्थ घालण्याचे पारडे आहे. दांडीचा गुरुत्वमध्यग आहे व तिचे वजन न आहे ते गुरुत्वमध्यापासून कार्य करील. व वजन क टेकूपासून हव्या तितक्या अंतरावर ठेवितो येते. समजा की व वजन ड पाशी असता व प पदार्थ पारड्यांत असता दांडी समतोल आहे. क टेकूच्या एका बाजूस प पदार्थाचे वजन अ ठिकाणी दिक् रेषेत कार्य करित आहे, आणि टेकूच्या दुसऱ्या बाजूस दांडीचे वजन न आणि लाविलेले वजन व अशी दिक् रेषांत कार्य करित आहेत. त्यांच्या क भोंवताळच्या भागकलाची बेरीज शून्य असली पाहिजे.



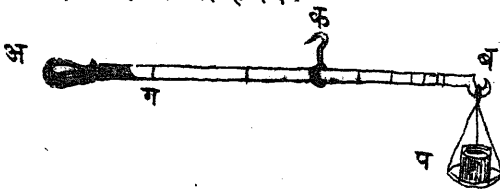
∴ प. अक - न. कग - व. कइ = ०

कगच्या दुसऱ्या बाजूस अक मध्ये ड हा असा बिंदु घेकी,

(१७४)

किंवा आंकडा असतो. याचा टेंकू फिरता असतो. व तो पुढे मागेसारून पदार्थाचे वजन काढितां येते.

अब ही दांडी आहे, तिचा गुरुत्वमध्य आहे, आणि न वजन आहे. ब टोंकाच्या पारब्ध्यांत प पदार्थ आहे. समजाकीं, टेंकू क ठिकाणी असतां दांडीसमतोल आहे. दुसरे वजनच नाहीं तेव्हां पदार्थास दांडीच्या वजनाने तोलून धरिलें हें उघड आहे. दांडीचे वजन आणि पदार्थाचे वजन यादोनच मेरणा क च्या दोन बाजूंस कार्य करित आहेत. या करितां त्यांची क भौवतालची समकत्वे समान असलीं पाहिजेत.



$$\therefore \text{प. बक} = \text{न. कग.} = \text{न (बम - बक)}.$$

$$\therefore \text{प. बक} + \text{न. बक} = \text{न. बग.}$$

$$\therefore \text{बक} = \frac{\text{न}}{\text{प+न}} \cdot \text{बग.}$$

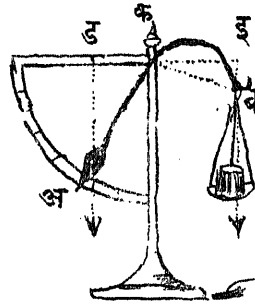
आतां प = न, २न, ३न, ४न इत्यादि घेतल्यानें बक = $\frac{1}{2}$ बग, $\frac{1}{3}$ बग, $\frac{1}{4}$ बग इत्यादि होतील म्हणून जेव्हां टेंकू $\frac{1}{2}$ बग ठिकाणी असेल तेव्हां प = ब म्हणजे पदार्थाचे वजन न च्या बरोबर होईल. तसेंच $\frac{1}{3}$ बग, $\frac{1}{4}$ बग इत्यादि ठिकाणी क असतां न च्या दुप्पट, तिप्पट पदार्थाचे वजन असेल म्हणून बमचे $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ इत्यादि भागपाडून त्या ठिकाणी १, २, ३, ४, इत्यादि आंकडे मांडिले म्हणजे ज्या आंकड्यावर टेंकू असेल, दांडीच्या वजनाच्या तितके पट पदार्थाचे वजन आहे असे समजावे. पोटभाग पाहिजे असल्यास प = $\frac{1}{2}$ न, $\frac{1}{3}$ न, $\frac{1}{4}$ न अशा किमती घेऊन पाडावे.

(१७५)

ही गोष्ट ध्यानांत ठेवण्याजोगी आहे की, प. च्या किमती गणितप्रमाणांत असल्या तर ब. पासून छेदांचीं अंतरे गायनप्रमाणांत असतात.

(११८) वांकड्या उच्चालकाचा पत्रें वगैरे लहान पदार्थ वजन करण्याचा तराजू- पत्रें वगैरे पदार्थाचीं वजने करण्याचा हा लहानसा तराजू असतो. अकब हा वांकडा उच्चालक क. टेंकूवर फिरता आहे. याच्या ब. टोंकास पत्रें वगैरे अडकविण्याचा आंकडा किंवा पारडें आहे. दुसरे टोंक अ. अणकुचीदार आहे. अ. जवळ उच्चालकास जाड गांठ आहे, व त्या गांठीन अ. पासून जवळच उच्चालकाचा गुरुत्वमध्य आहे. अणकुचीदार टोंकाखालीं वर्तुळाकार भाग पाडलेली पट्टी आहे. ब. स लाविलेल्या पारड्यांत पदार्थ घातला कीं, तें खालीं कळतें आणि अ. कांटा वर्तुळ पादावरून वर सरतो. पारड्यांत १, २, ३, ४ तोळ्यांचीं अनुक्रमें वजनें घालून अ. टोंक ज्या ठिकाणीं स्थिर राहतें त्या त्या ठिकाणीं छेद पाडितात. परंतु हे छेद गणित करून ही पाडितां येतात.

उच्चालकाचें वजन व. घेऊं ब. स लाविलेल्या पारड्याचें वजन व. घेऊं. पारड्यांत प. वजनाचा पदार्थ घातला असतां अ. क. सुजा ज्या उभ्या रवांवावर उच्चालक आहे, त्याशीं जो कोन करितें तो θ आहे असें कल्पू. उच्चालकाचें वजन अ. जवळच्या त्याच्या गांठीतील गुरुत्वमध्यांतून दिक् रेषेंत कार्य करील व आणि प + व यांच्या कार्य करण्याच्या दिशांवरील क. पासून लंब कडु आणि कडु काढ. आतां उच्चालक क. वर समतोल आहे म्हणून प्रेरणांच्या क. भोवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य अस-



(१७६)

ली पाहिजे.

$$\therefore \text{व. कड} - (\text{प} + \text{व}) \text{ कड} = 0$$

परंतु जर अक, बक भुजांच्या लांब्यान आणि म असल्या आणि अकब कोन काटकोन असला तर- कड = न.भु७; कड म.कोभु.७.

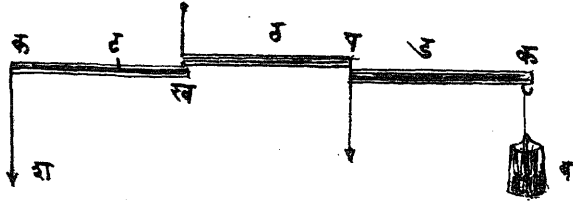
$$\therefore \text{व. न.भु७} = (\text{प} + \text{व}) \text{ म.को.भु७.}$$

$$\therefore \text{स्प. ७} = \frac{(\text{प} + \text{व}) \text{ म.}}{\text{व. न.}}$$

यावरून अ कोनाची किंमत व्यक्त अक्षरांत मिळाली. यास्तव प च्या किमती निरनिराळ्या धरिल्याने अ च्या किंमती येतील, व त्यांवरून वर्तुळ पादाचे भाग पाडितो येतील. व्यवहारांत बहुतेक प्रथम सांगितल्या रीतीनेच भाग पाडितात.

(११९) जेव्हां अनेक सरळ उच्चालकांची सांगड केलेली असते तेव्हां अशा सांगडीच्या समतोलत्वाचा नियम काढणें.

करव, रवप आणि पफ अशा तीन उच्चालकांची सांगड आहे. त्याचे टेंकू ट, ठ आणि ड आहेत. ही सांगड डा आणि व या घेण्यांनी समतोल आहे.



करव उच्चालकास क ठिकाणी डा शक्ति लाविलेली आहे. व दुसरे टेंकू रव दुसऱ्या रवप उच्चालकास जोडलेलें आहे. दोहोंच्या जोडाच्या रव ठिकाणी म दाब पडत आहे असें कल्पूं. तसेंच क जो

(१०७)

दाच्या विकर्णांन दाब पडत आहे असं समजूं.

कटरव, खठप, आणि पडफ हे तीनही उच्चारक स-
मतोल आहेत म्हणून.

$$\text{श} \times \text{कट} = \text{म} \times \text{टरव}, \quad \frac{\text{श}}{\text{म}} = \frac{\text{टरव}}{\text{कट}}$$

$$\text{म} \times \text{खठ} = \text{न} \times \text{ठप}, \quad \frac{\text{म}}{\text{न}} = \frac{\text{ठप}}{\text{खठ}}$$

$$\text{न} \times \text{पड} = \text{व} \times \text{डफ}, \quad \frac{\text{न}}{\text{व}} = \frac{\text{डफ}}{\text{पड}}$$

या तिहींचा गुणाकार करून.

$$\text{श} \times \text{कट} \times \text{खठ} \times \text{पड} = \text{व} \times \text{टरव} \times \text{ठप} \times \text{डफ}.$$

$$\text{किंवा} \quad \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{टरव} \times \text{ठप} \times \text{डफ}}{\text{कट} \times \text{खठ} \times \text{पड}}.$$

म्हणजे शक्ति व शक्तीच्या सर्व भुजा यांच्या गुणाकार वजन
य वजनाच्या सर्व भुजा यांच्या गुणाकाराबरोबर असतो.

उदाहरणे.

(१) पांच फूट लांबीच्या कटरव या सरळ उच्चारकाच्या कटरव वें-
कापाशी ४ आणि ६ शेंरांचीं बजनें दागिलीं आहेत, तर याचा टेंकू को-
रें असेल व त्याचर दाब किती असेल.

उ. कपासून ३ फुटांवर, १० शेंर दाब.

(२) पहिल्या वर्गाच्या उच्चारकाच्या भुजा ७:९ या ममाणांत आ-
हेत व टेंकू वर दाब २६ शेंरांचा आहे, तर दोहोंकडे किती दाब होना
ते काढे.

उ. २०४ आणि १५६ शेंर.

(३) समरूप असा १५ फूट लांबीचा दांडा एका क्षेत्रापासून

(१७८)

६ फूट अंतरावरच्या एका बिंदूवर समतोल राहण्यास दुसऱ्या शेवटास ३ शेरांचे वजन लावावे लागते, तर दांड्याचे वजन काय असेल?

उ- ३ $\frac{३}{४}$ शेरा.

(१) करवग हा एक सरळ उच्चालक आहे, करवची लांबी = ७ इंच आणि रवगची = ३ इंच आहे. ६ शेरा व १० शेरा अशीं वजनें क आणि रव बिंदूपासून रांगिळीं आहेत, आणि ग ठिकाणीं ६ शेरांची प्रेरणा उलट दिशेनें कार्य करित आहे, तर याचा टेंकू कोठें असला म्हणजे या प्रेरणांच्या कार्यनें तो समतोल राहिल व त्यावर दाब किती असेल?

उ- क पासून १ इंचावर; १० शेरा.

(५) ७ फूट लांबीचा उच्चालक क्षितिजपातळीशीं समांतर असा दोन टेंका रवाळीं दोन टेंकाचे देऊन ठेविला आहे. यावर २८ शेरांचें वजन कोठें ठेविलें असतां एका टेंकाव्यावर त्यापैकीं ८ शेरांचा दाब पडेल?

उ- दुसऱ्या टेंकाव्यापासून २ फूट अंतरावर.

(६) टेंकूवर १५ शेरांचा दाब आहे आणि उच्चाल्य व उच्चालक वजनांचें अंतर ३ शेरा आहे तर दोन्ही वजनें व भुजांमधील प्रमाण काद?

उ- १ व ६ शेरा, प्रमाण २ : ३.

(७) क आणि रव या प्रेरणांच्या कार्यपासून उच्चालक समतोल आहे. तसेंच कची तिप्पट केली आणि रव ६ शेरांनी वाढविली, तरी तो समतोल राहतो तर रवचे परिमाण काद?

उ- ३ शेरा.

(८) १० फूट लांबीचा दुसऱ्या वर्गीचा उच्चालक आहे. यांत १२ शेरांची शक्ति आणि १५ शेरा वजनास तालून धरिते. तर वजन कोठें लावावे?

(१७९)

उ. टेंकूपासून ८ फुटांवर.

(९) ताजव्याच्या एका पारड्यांत पदार्थ घातला तेव्हां त्याचें वजन ८ शेर भरलें, आणि दुसऱ्या पारड्यांत घातला तेव्हां त्याचें वजन $४\frac{१}{३}$ शेर भरलें, तर त्याचें स्वरें वजन काय?

उ. ६ शेर.

(१०) पांच उच्चालकांची एक सांगड आहे. त्यांच्या भुजा अनुक्रमें १२ व ३, ७ व ४, २५ व ५, १७ व ५, आणि २० व ४ अशा आहेत. यांपासून यांत्रिक स्वार्थ काय मास होईल ते सांग?

उ. ४२५.

(११) एका बोटीचें आवळें १५ फूट लांब आहे, ज्या टोंकापासून हातानें वळें चालवितों त्या टोंकापासून बोटीस अडकविलेले ठिकाण $३\frac{१}{३}$ फूट अंतरावर आहे. तर वळें मारणाराचा जोर आणि बोटीचा प्रतिबंध यांत प्रमाण काय असेल?

उ. २३ : ३०

(१२) एक मनुष्य चरक पायांनीं चालवीत आहे. जेथें पायांनीं दाबितो तें ठिकाण टेंकूपासून २ फूट अंतरावर आहे व ज्या टोंकापाशीं चरकाचा प्रतिबंध घडतो, तें टोंक टेंकूपासून ५ फुटांवर आहे तर चरक चालविण्यास किती शक्ति लागते?

उ. ५० शेर.

(१३) ४ शेर वजनाचा पदार्थ स्वोस्थ्या तराजूच्या एका पारड्यांत घातला तेव्हां त्यांचे वजन २ शेर भरलें तर तोच पदार्थ दुसऱ्या पारड्यांत घातला तर त्याचें वजन किती भरेल?

उ. ८ शेर.

(१४) एका वांकड्या उच्चालकांत टेंकूपासून शक्तीच्या कार्यमाग्वर जो लंब फडतो तो ११ फूट आहे, आणि वजनाच्या कार्यमाग्वर ५ फूट आहे. वजन २२० शेर असेल तेव्हां शक्ति किती अ-

साची.

उ. १०० शेर.

(१५.) खिळे काढण्याची चिरलेली हातोडी असते. हातोडीच्या दांड्याची लांबी २१ इंच आहे. हातोड्याच्या डोक्यापासून खिळे धरण्याची जागा ३ इंच लांब आहे. तर अशा हातोडीमें खिळे काढण्यांत किती यांत्रिक स्वार्थ प्राप्त होईल.

उ. ७.

(१६.) उच्चालकाच्या एका भुजेवर टेंकूपासून ६, १२ आणि १८ इंच अंतरांवर १, २, आणि ३ शेर अशीं वजनं अनुक्रमें टांगिलीं आहेत आणि दुसऱ्या भुजेवर टेंकूपासून ६, १० आणि १२ इंच अंतरांवर २, ३, आणि ४ शेरांचीं वजनं टांगिलीं आहेत, तर आपरवी १ शेराचें वजन कोठें टांगावें म्हणजे उच्चालक समतोल राहिल तें काद?

उ. पहिल्या भुजेवर टेंकूपासून २ इंचांवर

(१७.) एका गृहस्थानें २ शेर साखर विकत घेतली, परंतु त्यासतराजूनत कांहीं लबाडी असल्याचा संशय आला. म्हणून त्याणें १ शेर एका पारड्यांत व दुसरा शेर दुसऱ्या पारड्यांत वजन करून घेतला. तराजूनच्या भुजा ६ : ५ या प्रमाणांत आहेत असें कल्पिल्यास त्यास असें केल्यापासून किती नफा किंवा तोटा झाला तें सांग?

उ. ३/५ शेर नफा.

(१८.) एक आंबड धोबड तुळी २४ फूट लांब आहे. तिच्याजवळ शेवटापासून १० फुटांवर जर टेंकू ठिला तर त्यावर तुळी समतोल राहते. परंतु जर तो टेंकू मध्यबिंदूवर सारिला तर हलक्या शेवटावर १०० शेर वजनाचा मनुष्य बसावा लागतो व या शेवटापासून ४ फुटांवर १० शेरांचें वजन ठेवावें लागतें, तर तुळीचें वजन काद?

उ. ६.५० शेर.

(१८१)

(१९) वांकड्या उच्चालकाच्या भुजांमध्ये १५०° चा कोन आहे. त्याच्या टोंकापासून ७ आणि ६ शेंरांची वजनं टांगित्तीं आहेत. भुजांच्या लांब्या ३ आणि १५ फूट आहेत, तर उच्चालक समतोल असेल तेव्हां क्षितिज पातळीशीं मल्लेक भुजा किती अंशांचा कोन करितं तें काढ?

(२०) एक वांकडा उच्चालक मेंकुरर टांगित्ता म्हणजे समतोल स्थितींत त्याची आंबूड भुजा क्षितिजपातळीशीं समांतर राहते, परंतु या भुजेची लांबी दुप्पट केली तर दुसरी भुजा क्षितिजपातळीशीं समांतर राहते, तर भुजांच्या लांब्यांमधील ममाण काढ आणि त्यां मधील कोन काढ?

(२१) एक खोटा तराजू आहे व त्याच्या भुजा गुरुत्वशून्य आहेत, असें कल्पिलें. लांब भुजा आंबूड भुजेहून आंबूड भुजेच्या रू अधिक लांब आहे, आणि यातराजूनें सारखर वजन करून घेताना दोन्ही पारड्यांत सारखे वेळ घालून सारखर घेतली तर दुकानदाराचा या व्यापारांत शेंकडा रू तोटा होतो असें दारवीव?

(२२) वजन करण्याची साधी दांडी १८ इंच लांब आहे व तिचें वजन ३ शेर आहे व ती एका टोंकापासून तीन इंच अंतरावर टांगित्ती आहे. सरकविण्याचें वजन २ शेंरांचें असलें तर अशा दांडीनें अत्यंत मोठ्या अशा केवढ्या वजनाच्या पदार्थाचें वजन करितां येईल.

उ- १६ शेर.

(२३) साधी वजन करण्याची दांडी १२ इंच लांब आहे. व पदार्थ घालण्याच्या पारड्यासुद्धां दांडीचें वजन १ शेर आहे. पारडें लाविलें आहे त्या शेंवटापासून २ इंचांवर दांडीचा गुरुत्व मध्य आहे. स-

(१८२)

रकविण्याचें वजन १ शेरानें आहे व दांडीनें अत्यंत मोठें म्हणजे १२ शेरानें वजन करितां येतें, तर तिचा टेंकू कोठें असेल तें काढ ?

उ- पारड्यापासून १ इंचावर.

(२४) साध्या दांडीवरील सरकविण्याचें वजन ६ औंसांचें आहे. हें वजन अर्ध औंसाचें कमी केलें तेव्हां एका पदार्थाचें वजन दांडीवरून ६ पौंड भरलें, तर त्यांत विकत घेणाराचा किती तोटा झाला ?

उ- $\frac{1}{2}$ औंस

(२५) डेनिश तराजूच्या दांडीचें वजन १ शेर आहे आणि ५ शेर व ५ शेर वजन काढण्याच्या खुणांमधील अंतर १ इंच आहे तर दांडीची लांबी किती ?

उ- ३० इंच.

(२६) १ अबक हा एक वाकडा रज्ज्वाक आहे. याच्या कअ आणि कब या भुजा सरळ असून त्यांमधील कोन 120° चा कोन आहे. तेव्हा कअ भुजा क्षितिजपातळीशीं समांतर असते. तेव्हां ब टोंकास लाविलेल्या व वजनास समतेल धरण्यास अ टोंकास क वजन लावावें लागतें आणि कब क्षितिजपातळीशीं समांतर असतो तेव्हां अ टोंकास रव वजन लावावें लागतें तर क आणि रव यां मधील प्रमाण काढ ?

उ- रव = ३क.

(२७) १८ शेर वजनाच्या एका समरूप दांड्याच्या एका टोंकाखाली टोंकावा दिळा आहे, तर दुसऱ्या टोंकापासून २ फूट अंतरावर चरच्या बाजूस दिक् रेषेत कार्य करण्यास केवटें वजन लावावें म्हणजे दांड्या क्षितिजपातळीशीं समांतर राहिल ?

उ- ३० शेर.

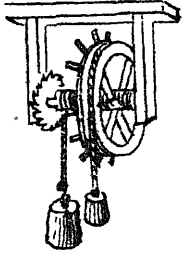
प्रकरण ९.

चाक व कणा किंवा कण्यास खिळलेले चाक.

(१२०) पदार्थास चलन देण्याचा उच्चालकाचा व्यापार थोडा थोडा आणि विसाव्याने घडतो तरफ लावून एकादा धोंडा किंवा तुळी उचलावयाची असली, तर तरफ रवालीं दाबून ती जमिनीस येऊन टेंकली, म्हणजे तरफेस पुनः पूर्व स्थितीवर आणावे लागते आणि या काळांत धोंडा किंवा तुळी जितकी वर चढली असेल, तेथे दुसऱ्या उपायाने उचलून धरावे लागते. म्हणून कोणतेही वजन पुष्कळ उंच उच्चालकांने एक सारवे उचलितां येत नाहीं. जेव्हां थोड्या शक्तीने मोठे वजन थोड्या उंचीवर उचलावयाचे असते तेव्हां मात्र उच्चालकाचा उपयोग करतात आणि अशावेळीं मात्र इच्छित फल प्राप्त होते.

पदार्थ हवा तितका उंच उचलितां याचा आणि हे कार्य अरबंद करितां याचे या करितां कण्यास खिळलेल्या चाकाची योजना आहे. चाकास कणा असा बळकट व पक्का बसविलेला असतो कीं दोनही एकदम फिरतात. शक्ति चाकाच्या परिघास लाबितात आणि वजन कण्यास लाबितात. दोहोंच्या साधारण आंसांचीं दोके दोन टेंकूवर अशीं बसविलेलीं असतात कीं, त्यांवर आंस खेळता व फिरता असतो. चाकास दोरीने किंवा सारवळीने चाकाच्या परिघावर दोरी किंवा सारवळी कोठे तरी अडकवून गुंडाळतात आणि तिला शक्ति लाबितात, आणि कण्यावर दोरी किंवा सारवळी उलट्या दिशेने गुंडाळून तिला वजन दांगितात. रवालील आकृतीत ही रचना दाखविली आहे. चाकास लाबिलेल्या शक्तीने चाक फि-

रुं म्हणजे त्यास रिब्लेला कणाही फिरतो. चाकाचा एक फेरा झाला



तर कण्याचाही एकच फेरा होतो. चाकास लाविलेल्या शक्तीने जर चाकावर दोरी गुंडाळली, तर आंसावरील उलगाडेल आणि चाकावरील उलगाडली तर आंसावरील गुंडाळेल. आंस व चाक यांचे फेरे सारखे होतात म्हणून चाकावरील दोरी त्यास लाविलेल्या शक्तीच्या योगाने एका फेऱ्या-

त त्याच्या परिघा इतकी उलगाडली, तर कण्यावरील दोरी एका फेऱ्यात आंसाच्या परिघा इतकी त्यावर गुंडाळेल, म्हणजे आंसाच्या परिघा इतक्या उंचीतून वजन चढेल. या वर्णाचा वरून असें लक्षांत येईल की, यंत्रावर विरुद्ध प्रेरणांचें कार्य होतें आणि त्याविरुद्ध रीतीनें लागू होतात. यादोन्ही प्रेरणा साधारण आंसापासून निरनिराव्या अंतरावर लागू होतात. आंसाच्या विज्ये इतक्या अंतरावर वजन लागू होतें, आणि चाकाच्या विज्ये इतक्या अंतरावर शक्ति लागू होते. चाकावरच्या दोरीस कांहीं जोराचा हिस्का देऊन चाक एकवेळा फिरविलें, तर चाकाच्या एका वेत्याबरोबर कण्याचा एक वेढा होईल. यासुळे ज्या दोरीस वजन रांगिलें असतें, तो दोर कण्या भोंवता एकवेळ गुंडाळेल व तेणेंकरून कण्याचा परिघ जितका असेल तितकेंच वजन वर चढेल. यासच चाकाच्या परिघास जसा कण्याचा परिघ तसा शक्तीच्या वेगास वजनाचा वेग असेल. चाक आणि कणा यांमधील प्रमाणा इतकें जर शक्ति आणि वजन यांमध्ये प्रमाण असलें तर यंत्र समतोल राहील. म्हणून चाकाचा परिघ किंवा व्यास आणि कण्याचा परिघ किंवा व्यास यांमध्ये जें प्रमाण असतें तें यंत्राची शक्ति किंवा यांत्रिक स्तरीय दाखवितें. उदाहरणार्थ जर चाकाचा व्यास १२ इंच आणि कण्याचा व्यास १ इंच असला तर एक शेराची शक्ति चाकास लाविली असता ती कण्यावर १२ शेरे वजनास तालून धरील. याहून किंचित जास्त प्रेरणा

चाकास लागू केळी कीं, कण्यासहीत चाक फिरेल; आणि वजन उचलेल.
चाकाची विज्या च आणि कण्याची विज्या क कल्पिली तर असें समाण
होईल.

शः वः = कः च, किंवा श × च = व × क.

या स्थळीही हे संज्ञान ठेवायें कीं, या यंत्रांत सुरुवातीची शक्ति
उत्पन्न होत नाहीं व जितकी शक्ति खर्च होत तितकेच काम होतें. म्हा-
णजे दोहोंची चालकत्वे समान राहतात. १ डोराची शक्ति जर १२ इंच अ-
वकाशांतून रवाक आली, तर १२ डोरांचे वजन फक्त १ इंच अवकाशा-
ंतून चढतें. या यंत्रापासून फायदा हाच कीं, एक डोराच्या शक्तीनें थोड्या
अवकाशांतून कां होईना, पण १२ डोरांचें किंवा त्याहून जास्त वजन उ-
चलितां येतें.

(१२१) कण्यास खिळलेल्या चाकाच्या समतोलत्वाचा नियम
पेरणांच्या नियमांवरून काढणें.

श आणि व यांपेरणा तिकू रेषेंत कार्य करितात. श चा-
काच्या एका बिंदुपासून आणि व आंसाच्या एका बिंदुपासून का-
र्य करितात. यांच्या दिशा चाक व कणा यांच्या परिघांच्या स्पर्श रेषा
आहेत म्हणून स्पर्शबिंदुपासून अनुक्रमें चाकाच्या मध्यबिंदुपर्यंत आ-
णि कण्याच्या मध्यबिंदुपर्यंत रेषा काढिल्या तर ते त्या आंसापासून श
आणि व यांच्या कार्य करणाऱ्या दिशांवर लंब होतील ज्यापेक्षां
या पेरणांनीं सर्व यंत्र आसलेली रेषेवर समतोल आहे त्यापेक्षां त्यां-
च्या आंसा भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहि-
जे म्हणून चाक आणि कणा यांच्या विज्या च आणि क क-
ल्पिल्या तर:-

$$श \times च = व \times क, \text{ किंवा } \frac{श}{व} = \frac{क}{च}$$

म्हणून जेव्हां कण्यास खिळलेले चाक समतो-

(१८६)

ल असेल तेव्हा शक्तीसजसे वजन तसे आंसाच्या त्रिज्येस चाकाची त्रिज्या असे ममाण असेल.

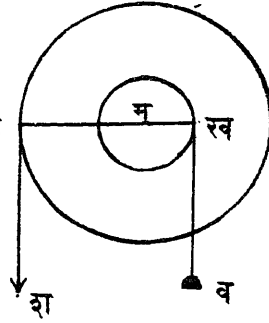
कण्यास खिळलेले चाक हा एक वास्तविक उच्चालकाचा प्रकार आहे. एकाच आंसावर असलेल्या अनेक उच्चालकांचा समुदाय हा असतो. यांपैकी एका उच्चालकावर कार्य घडते या ममाणे उच्चालकाचे सतत कार्य घडते म्हणून चाक आणि कणा हा एक सतत वर्ती उच्चालक असतो. आणि यापासून यांत्रिक स्वार्थ कोणत्याही साधारण उच्चालकापेक्षा फार घडतो. आता चाक आणि कणा यांच्या व्यापार उच्चालकासारखा कसा होतो आणि वरील समतोलत्वाचा नियम त्यावरून कसा निघतो हे सांगतो.

चाक व कणा यांच्या साधारण आंसाशी लंब अशा पातळीने छेदिल्यास जे यंत्राचे छिन्न होईल, ते खालील आकृतीत दाखविले आहे. या छिन्नात दोन समकेंद्र वर्तुळे आहेत व त्यांचा साधारण मध्य म आहे.

शक्ति आणि वजन या प्रेरणा आंसाशी लंब अशा पातळीत कार्य करितात असे समजल्याने, त्यांच्या क्रांतीत फरक पडणार नाही.

ज्या दोरीच्या योगाने शक्तीचे

कार्य घडते ती दोरी चाकाच्या परिघाच्या क बिंदुपासून खाली लोंबते. आणि ज्या दोरीने वजनाचे कार्य घडते ती कण्याच्या परिघाच्या रव बिंदुपासून खाली लोंबते. क श आणि रव व या प्रेरणांचा कार्य करण्याचा मार्ग दर्शविणाऱ्या रेषा वर्तुळाच्या स्पर्शरेषा होतील. म्हणून म क आणि म रव हे त्यांचे लंब होतील. यास्तवजर क म रव हा एक उच्चालक कल्पिला आणि त्याचा म हा दे-



(१८७)

कू कल्पिता तर त्यावर क इ आणि र व या समांतर प्रेरणा कार्य करितात म्हणून उच्चाळाच्या समतोलत्वाच्या नियमा प्रमाणे: (क. १०७)

$\frac{श}{व} = \frac{रवम}{कम}$

रवम आणि कम या अनुक्रमेण व चाक यांच्या त्रिज्या आहेत. त्या क आणि च घेतल्या तर सारणी अशी होईल.

$\frac{श}{व} = \frac{क}{च}$

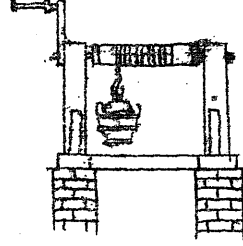
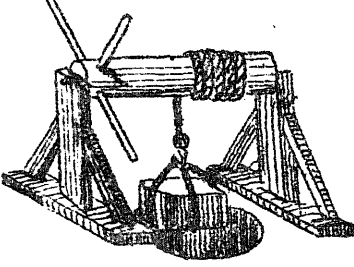
जर दोऱ्यांची जाडी हिशेबांत घेतली तर मध्येकाची त्रिज्या दोऱ्याच्या निम्न्या जाडीने वाढवावी लागेल. म्हणजे चाकाच्या व कण्याच्या त्रिज्यांत दोरीची अर्धी जाडी मिळवावी लागेल.

वर सांगितल्या मकारच्या चाक व कण्यांत एका बाजूस शक्ति आणि समोरच्या बाजूस वजन कार्य करिते म्हणून कणा ज्या ठेकूबर असेल त्यावर एकंदर दाब दोहोंच्या बेरजे बरोबर होईल; परंतु शक्ति आणि वजन एकाच बाजूस कार्य करितील आणि शक्तीचे कार्य वरच्या दिशेने व वजनाचे रचालाच्या दिशेने होत असेल तर एकंदर दाब दोहोंच्या वजाबाकी बरोबर असेल. प्रचारांत शक्ति आणि वजन जरी त्रिज्याशीलंब व अशा दिशांत कार्य करितात तरी त्यांच्या दिशा सर्वदां परस्पर समांतर नसतात. अशा वेळीं ठेकूबरील दाब प्रेरणा समांतर भूज चौकोनाच्या नियमानें काढावा.

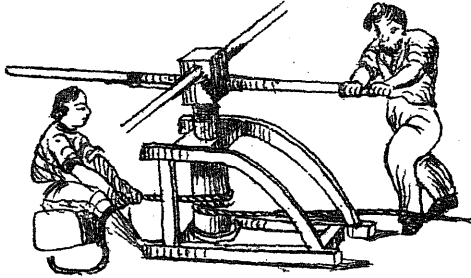
(१२२) या यंत्रांत शक्ति लागू करण्याच्या अनेक तऱ्हा असतात. शक्तीची योजना चाकाच्या द्वारानें कण्यावर करावी, ती कधी कधी तशी न करितां कण्यास एक दांडा बसवितात, तो उच्चाळाकडे काम करितो. त्याच्या वाटेच्या पिरण्यानें चाकाचे काम होतें. या यंत्राचा उपयोग रबाल विहिरीतून पाणी काढण्यास आणि उंचटिकाणीं दगड उचलण्यासही करितात. कधी कधी कण्यास सारख्या

(१८८)

अंतरावर चार पांच भोंकें पाडून त्यांत खुंट्या बसवून त्या खुंट्या मनु-
ष्ये हानांनीं फिरवून कण्यास गति देतात.



अशा खुंट्या कण्याच्या दोहों टोंकासही लावून दोहोंकडे
फिरवितात. यातूनचें उत्कृष्ट उदाहरण आपला पाणी काढण्या-
चा रहाट होय. तसेंच मोठ्या गलबताचें सुकाणू हालविण्याचें
चाक असले असतें. वरच्या दोन रचनेंत कणा आडवा असतो, व
त्यास शक्ति लंब दिशेंत लागू होते. मोठ्या गलबतावरील चांगर
ओढण्याचें व शीड चढविण्याचें जें असले चंच असतें त्याचा क-
णा उभा असतो, व त्यास शक्ति आडवी लागू करितात.

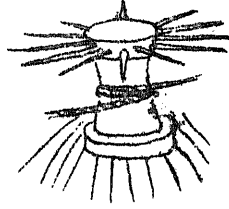


गलबताच्या तळावर किंवा दुसऱ्या मजल्यावर कणा वरील आ-
कृतींत दारविल्या ममाणें उभा बसविलेला असून त्याच्या वरच्या
शेवटापाशीं समोरासमोर आरपार भोंकें पाडून दोन लांब दांडे

(१८९)

बसवितात किंवा कणा गोल असून त्यास सभोवार अनेक भोंकें पा-

डून अनेक खुंटे बसवितात. प्रत्येक दांड्यास एक किंवा दोन मनुष्ये वारोळें फिरवितात. हे दांडे फिरतात त्या प्रमाणे उभाकणाही फिरतो. आणि तें केलून नांगराचा दोर किंवा सांखळी कण्या भोंवती गुंडाळली जाऊन नांगरजवळ येतो. कामकरावयाचे नसने तेव्हां दांडे काढून ठेवितात. उंसाचा रस काढण्याचा घाणा हे याच प्रकारचे उदाहरण होय. यांत कण्यावर दोर गुंडाळून नसून त्याच्या फिरण्याने दुसरा कणा फिरतो. माचीन काळी जेव्हा झालीच्या यान्या कण्या आणि मिश्रकरूप यंत्रे नव्हती तेव्हां मोठे मोठे दगड उंच इमारतीवर चढविण्यास अशा अनेक यंत्रांचा उपयोग करीत.



अशा यंत्राचे सामर्थ्य काढने वेळी पूर्वी सांगितल्या निष्णा प्रमाणेच प्रमाणे घ्यावयाची. चाक्रान्या त्रिज्येच्या ठिकाणी कण्याची त्रिज्या आणि त्यास लाविलेल्या दांड्याची लांबी यांची बेरीज घेण्याची:- दहा दांडे असून प्रत्येकास एक प्रमाणे १० मनुष्ये लाविली असली तर सर्व शक्ति १० मनुष्यांच्या शक्तीबरोबर घ्यावयाची. असली १० यंत्रे एकच दगड उंचलावयास लाविली असल्यास एकंदर शक्ति १० पट होईल.

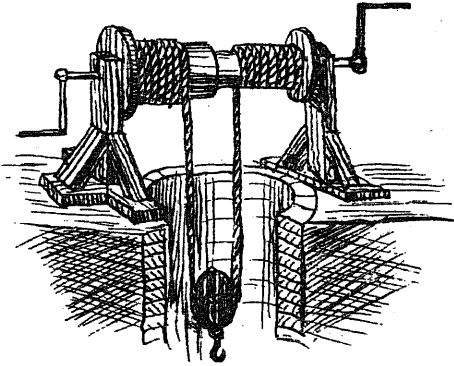
समजा की, कण्याची त्रिज्या ६ इंच आणि दांड्याची लांबी ५ ३/४ फूट आहे. तर एकंदर चाक्राची त्रिज्या ७२ इंच झाली म्हणून कणा आणि चाक्र यांच्या त्रिज्यांत प्रमाण १:१२ असे आहे. जर प्रत्येक मनुष्याची शक्ति २०० शेर धरिली तर १० मनुष्यांची २००० होईल. आणि इतक्या शक्तीने वरच्या यंत्राने २५००० शेरांचे वजन उचलिते येईल.

(१९०)

(१२३) संयुक्त चाक व कणा- चाक व कणा यांचा यांत्रिक स्वार्थ चाकाची त्रिज्या आणि कण्याची त्रिज्या या दोहोंमधील प्रमाण जसें मोठें होईल, तसा मोठा होतो. या यंत्राची शक्ति वाढविण्यास चाकाची त्रिज्या वाढवावी किंवा कण्याची त्रिज्या कमी करावी. शक्तीपेक्षां अतिशय मोठें वजन उचलावयाचें असलें आणि जर चाकाची त्रिज्या कायम ठेविली तर कणा फार बारीक करावा लागेल, व अशा नें कदाचित तो वजनाचा भार सहन करणार नाही. अथवा कणा कायम ठेवून जर चाकाची त्रिज्या फार मोठी केली तर शक्ति अतिशय मोठ्या स्थळांतून लागू करावी लागेल, आणि यंत्र फार अवजड होईल.

या दोनही अडचणी चुकवून इष्टकार्य भाग साधण्याकरितां संयुक्त चाक व कणा यांची योजनाकरितात. कण्याचे दोन भाग भिन्न भिन्न जाडीचे करून चाकास स्थिरवितान, किंवा दांड्यानें तसला कणा फिरवितान. आणि येणें करून यंत्राच्या आंगां हवी तितकी बळकटी राहून तें अवजड होत नाही आणि त्याचें यांत्रिक सामर्थ्यही वाढतें असलें यंत्र

या आकृतीत दाखविलें आहे. कण्याच्या एका भागाचा व्यास दुसऱ्याच्या व्यासापेक्षां कमी आहे. एक दोर कण्याच्या बारीक भागास गुंडाळून त्याचें दुसरें टोक एका कणीच्या खांबेवरून नेऊन कण्याचे जाड भागास उलटें गुंडाळलें आहे. उच-



(१११)

लावयाचें वजन दोरांत ओवलेल्या कृष्ण रंगाच्या दोरीस वांगिलें आहे. जाड भागावर दोर गुंडाळला जावा असा कणा फिरविला म्हणजे अर्धीतच तो बारीक भागावरून उलगडतो. चाकाचा एक फेरा झाला म्हणजे जाड्या भागाच्या परिघा इतका दोर वर येतो. आणि बारीक भागाच्या परिघा इतका दोर खाली जातो. यामुळे यंत्राचा एक फेरा झाला म्हणजे कण्याचा जाडा व बारीक भाग यांच्या परिघांच्या अंतरा इतका दोर वर येतो, व तितकें वजन वर चढतें. यें एक रून जाड व बारीक या भागांच्या व्यासांच्या अंतरा इतक्या बारीक व्यासाचा कणा लाविल्या पासून जें कार्य झालें असतें तसें कार्य या संयुक्त कण्यापासून होतें, व यंत्राची बळकटी कमी होत नाही. म्हणून कण्याची जाडी कमी न करितां जाड व बारीक भागांच्या व्यासांमधील अंतर हवें तितकें कमी करून यंत्राक स्वार्थ म्हणजे शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण हवें तितकें वाढवितां येतें.

(१२४) संयुक्त चालक व कणा यांच्या समतोलत्वाचा नियम काढणे— कण्याच्या जाड व बारीक भागांच्या त्रिज्या अनुक्रमेण k_1 , k_2 घेऊं आणि चाकाची त्रिज्या किंवा कण्यास लाविलेल्या दांड्याची कण्याच्या आंसापासून लांबी च घेऊं. कण्याच्या आंसा भोंवती यंत्र समतोल आहे म्हणून आंसा भोंवतालच्या मेरणांच्या भ्रामकत्वाची वेरीज शून्य असली पाहिजे. वजन कृष्ण रून गेलेल्या दोरीच्या दोहों भागांनी उचललें आहे. सलग दोरीचा ताण सर्वत्र सारखा असतो. (क-१२ पहा.) म्हणून प्रत्येक भागास म्हणजे जाड भागावरील व बारीक भागावरील दोरीस W व वजन दांगिल्या प्रमाणें आहे. जाड भागावर दोरी गुंडाळतें म्हणून त्यास लाविलेल्या वजनाचें भ्रामकत्व शक्तीच्या भ्रामकत्वाशीं विजातीय, आणि बारीक भागावरील दोरी उलगडतें म्हणून तीस लाविलेल्या वजनाचें भ्रामकत्व सजातीय होईल म्हणून—

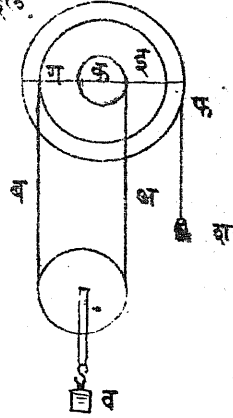
(११२)

$$\begin{aligned} \text{श} \times \text{च} + \frac{1}{2} \text{व. क} - \frac{1}{2} \text{वक} & \circ \\ \text{श च} &= \frac{1}{2} \text{वक} - \frac{1}{2} \text{वक} \\ \text{शच} &= \frac{1}{2} \text{व (क - क)} \end{aligned}$$

$$\text{किंवा } \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{क} - \text{क}}{2\text{च}}$$

(१०७) या आकृतीत यंत्राचे छिन्न दारवविले आहे, त्या वस्तू वरील सिद्धांत अधिक स्पष्टपणे ध्यानांत घ्यावे.

यांत व वजनास दोराचे अ आणि ब भाग उचलून धरितात, म्हणून त्यातील प्रत्येक भाग व वजनाच्या अर्धात ताणिला जातो. जसजसे यंत्र फिरते, त्या प्रमाणे कण्याच्या बारीक भागापासून जाड्या भागाकडे दोर जातो. अतिमोठ्या वर्तुळा भोंवती म्हणजे चाका भोंवती जो दोर गुंडाळिला आहे. त्यास शक्ति लाविली आहे. श आणि व या प्रेरणा



फ आणि इ स्थितीं एकाच दिशेस लाविलेल्या आहेत. दुसरी व प्रेरणा ग स्थितीं कण्याच्या दुसऱ्या बाजूस उलट दिशेने लाविली आहे. ग स्थितीं उलट दिशेने म्हणजे वरच्या बाजूस कार्य करणाऱ्या व प्रेरणेस इ आणि श या इ आणि फ स्थितीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणा क विंदूवर तोळून धरितात. म्हणून गक इफ हा उच्चालक क टेंकूवर समतोल आहे. म्हणून कच्या दोहों बाजूंच्या प्रेरणांची क सभोवतालचीं भामकते समान असली पाहिजेत. प्रेरणांच्या दिशांवर कग, कफ लंब आहेत आणि कफ = च, कग = क, आणि क-इ = क धरिले तर:-

$$\begin{aligned} \text{श} \times \text{च} + \frac{1}{2} \text{वक} &= \frac{1}{2} \text{वक}; \text{शच} = \frac{1}{2} \text{व (क - क)} \\ \therefore \frac{\text{श}}{\text{व}} &= \frac{\text{क} - \text{क}}{2\text{च}} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{क} - \text{क}}{\text{च}} \end{aligned}$$

यावरून असें झालें कीं, शक्तीस चाकाच्या त्रिज्येनें गुणिलें असतां जो गुणाकार येईल तो अर्ध वजनास कण्याचा जाडा व बारीक भाग यांच्या त्रिज्यांच्या अंतराचें गुणून जो गुणाकार येईल त्या बरोबर असतो.

कडू आणि कग म्हणजे क आणि क यांमधील अंतर अत्यंत लहान करून विवक्षित शक्तीनें हेंचें तेवढें वजन उचकितें येईल.

(१२६) अनेक चाके व कणे यांची सांगड-जेव्हां नियमित शक्तीनें यंत्राच्या आंगां फार सामर्थ्य आणावयाचें असतें तेव्हां अनेक उच्चालकांच्या सांगडीप्रमाणें अनेक चाके व कणांची सांगड करितात. पहिल्या चाकावर शक्ति लावितात. या चाकाच्या फिरण्यानें याचा कणा फिरतो. या कण्याच्या फिरण्यानें दुसऱ्या चाकास फिरवितात, व तेणें कडून त्याचा कणा फिरतो. या दुसऱ्या कण्याच्या फिरण्यानें तिसरें चाक फिरवितात, व त्याजबराबर त्याचा कणा फिरतो. या प्रमाणें हवीं तितकीं चाके व कणे एकत्र जोडितात, आणि शेवटल्या कण्यास वजन लावितात.

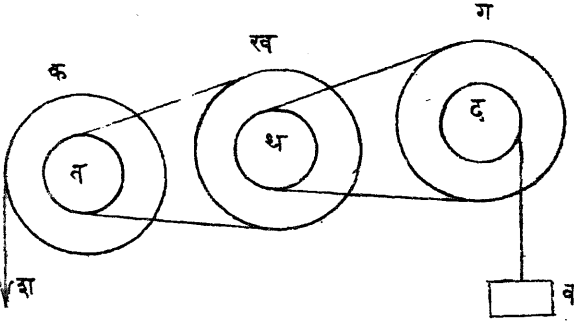
एका चाकाच्या फिरण्यानें दुसऱ्यास फिरविण्यासाठीं म्हणजे एकाच्या गतीनें दुसऱ्यास गति देण्याकरितां अनेक रीतींचीं योजना करितात. परंतु सर्वांत साधारण रीति म्हणजे पहिल्या चाकाच्या कण्याच्या परिघावर खांच पाडून त्यावरून दुसऱ्या चाकाच्या परिघावरील खांचेंत एक बळकट दोरी किंवा चासड्याचा चपटा पडानेतात. दोरीची किंवा पड्याची शेवटें एकत्र गाठवून किंवा शिवून त्या दोरीस किंवा पड्यास सलग किंवा सतत वर्ति करितात. दोरी किंवा पट्टा यांचे पृष्ठभाग खरबरीत असतात आणि पहिल्याचा कणा व दुसऱ्याचें चाक यांच्या परिघाचे पृष्ठभाग खरबरीत असतात, यामुळे घर्षण घडून कण्याची गति चाकास मिळते. यारीतीनें फिरत असणाऱ्या दोन चाकांची सांगड रवालील आकृतींत दाखविली

(१२४)

आहे. पहिल्या आकृतीत चाके एकाच दिशेने फिरतात व दुसऱ्या आ-



कृतीत दोरीस विदा दिळा असल्याने चाके परस्पर उलट दिशांनी फिरतात या आकृतीत अशा तीन चाकांची सांगड दारवविली आहे. आ-



तां अशा सांगडीतील शक्ति आणि वजन यां मधील प्रमाण कसे काढावे ते सांगतो.

(१२७) क, ख, ग ही तीन चाके आणि त, थ, द हे तीन त्यांचे कणे आहेत. (सर्गील आकृतीने पहा.) क चाकास शक्ति लाविली आहे. कच्या त कण्यावरून आणि खच्या चाकावरून एक सतत बर्नि सलग दोरी किंवा पट्टा नेऊन क आणि ख यांस जोडिलेले आहे. पट्टा आणि परीघ याच्या घर्षणाने त कणा फिरतांच ख चाक फिरते. नसेंच ख चा थ कणा आणि ग चाक यांस एका सतत बर्नि पट्ट्याने जोडिलेले आहे. आणि ग च्या द कण्यास वजन दां-

(११५.)

गिळें आहे. कणा फिरल्यावर दोरीच्या आंगां ज्या मानानें नाण घेईल त्या मानानें दुसऱ्या चाकास गति मिळेल.

त आणि रव यांस जोडणाऱ्या पट्ट्याचा ताण ट, आणि थ आणि ग यांस जोडणाऱ्या पट्ट्यांचा ताण ठ आहेत असें कल्पूं. तर पहिलें चाक व त्याचा कणा यांवर इ आणि ट या प्रेरणांचें कार्य होत आहे. दुसऱ्यावर ट आणि ठ यांचें आणि तिसऱ्यावर ठ आणि व यांचें कार्य होत आहे.

प्रत्येक चाक समतोल आहे म्हणून (क. १२१ प्रमाणें) क, रव, ग या क, रव, ग या चाकांच्या त्रिज्या आणि त, थ, ट या त, थ, ट या कण्यांच्या त्रिज्या आहेत असें घेऊन—

इ	त कण्याची त्रिज्या.	त
ट	क चाकाची त्रिज्या.	क
थ	थ कण्याची त्रिज्या.	थ
ठ	रव चाकाची त्रिज्या	रव
ठ	ट कण्याची त्रिज्या.	ट
व	ग चाकाची त्रिज्या	ग

या तिन्ही समीकरणांचा गुणाकार करून—

$$\frac{इ}{ट} \times \frac{थ}{ठ} \times \frac{ठ}{व} = \frac{इ}{व} \times \frac{त \times थ \times ट}{क \times रव \times ग} \quad \begin{array}{l} \text{सर्व कण्यांच्या त्रिज्यांचा गुणाकार.} \\ \text{सर्व चाकांच्या त्रिज्यांचा गुणाकार.} \end{array}$$

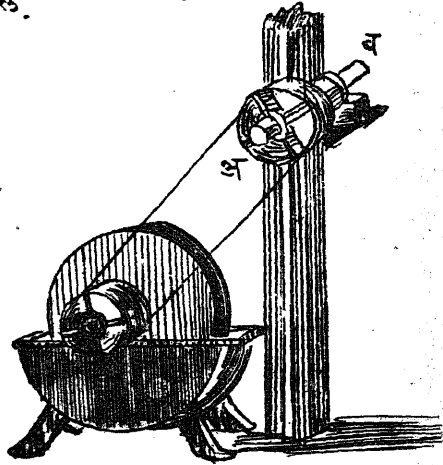
म्हणून जर अनेक चाकांची या प्रमाणें सांगड असेल तर शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण सर्व कण्यांच्या त्रिज्यांचा गुणाकार आणि सर्व चाकांच्या त्रिज्यांचा गुणाकार यांमधील प्रमाणा बरोबर असतें.

(१२०) एका चाकाच्या फिरण्यानें दुसऱ्या चाकास गति देण्याची उदाहरणें कळा कौशल्याच्या सर्वप्रकारच्या कारखान्यांत असंख्य आढळतात. सूताराचें अंकडें कातण्याचें चाक, तांबट याचें भांडींवर

(१९६)

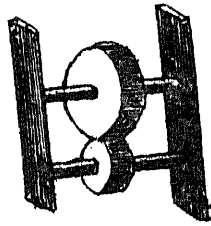
कावर धरण्याचे चाक, लोहाराचे चाकू, सून्या, वस्तरे वगैरे हत्या-
संस धार लावण्याचे चाक, लोहाराचा लोखंडी कांतीव कामकरण्याचा
चरक इत्यादि सर्व यंत्रांत एक चाक फिरवून दुसरे चाक फिरविण्याची
योजना असते. वाफेच्या यंत्राचे थोरले चाक वाफेने फिरवून त्याच्या
योगाने पट्टे खचून दुसरी अनेक चाके फिरवितात. मोठमोठ्या कारखान्यांत
या रीतीने एका चाकाच्या फिरण्याने अनेक चाकांस गति देता
यावी, यासाठी कारखान्याच्या इमारतीच्या छताखाली एक लांबच लांब
ब लोखंडी रूळ आंसा भोंवती फिरता बसविलेला असतो. आणि
त्यावरून वाफेच्या यंत्राच्या थोरल्या चाकावरून एक सतत वर्ति चा-
क मळ्याचा पट्टा जातो. येणेकरून चाक फिरले म्हणजे रूळ फिरतो. यारू-
ळावर नियमित अंतरावर अनेक सतत वर्ति पट्टे पातलेले असून चर-
क व दुसरी यंत्रे यांच्या चाकांवरून नेलेले असतात. याची कल्पना
या आकृतीवरून बरीच येईल.

यांत अ ब हा
छताखालील ल लांब
रूळाचा भाग आहे. या
रीतीने गति देण्यांत हा
फायदा असतो कीं पट्टे
एकमेकांपासून हव्या-
वितक्या अंतरावर ठे-
वितां येतात व पुढे मागे
सारतां येतात; आणि
थोडासा फेरफार करून
रूळ रूळ हीं चाके
फिरवितां येतात. मुंबई-
तील मोठ मोठ्या गिरण्यांच्या व दुसऱ्या छोट्या कारखान्यांत ही रचना



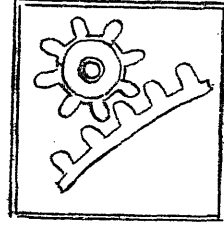
सर्वत्र दृष्टीस पडेल. जेव्हां मध्येच एकाद दुसरें यंत्र बंद ठेवणें असेल तेव्हां त्यावर या मात्र पट्टा पाडतात नेणेंकरून तें बंद होऊन बाकीचीं यंत्रं चालू राहतात.

(१२९) चाकानें चाकास गति देणारीं चाकें— कातड्याचा पट्टा किंवा दोरी न लावितां एका चाकाच्या कण्याच्या परिघानेंच दुसऱ्या चाकाच्या परिघावर कार्य घडूनही चाक फिरूं शकते. परिघांच्या खरबरीत पृष्ठभागांचीं एकमेकांवर कार्य घडून चाकें परस्पर उलट दिशेनें फिरतात आणि अशा ठिकाणीं त्यांचे घेग त्यांच्या व्यासाच्या उलट प्रमाणांत असतात. एकमेकांस गति न देतां चाकें फिरूं नयेत अशा बद्दल कांहीं तजवीज योजावी लागते. जर परिघाचे पृष्ठभाग अगदीं साफ गुळगुळीत असतील. व त्यांपासून परस्परांचें कांहीं घर्षण घडणार नाहीं तर चाकें एकमेकांस गति देणार नाहीं; या करितां अनेक उपाय योजितात. जेव्हां यंत्राच्या आंगां फार मोठी शक्ति असण्याची अपेक्षा असेल, तेव्हां परिघावर चामड्याचा पट्टा बसवून किंवा परिघ आडव्या हिराच्या लांकडी तुकड्यांचा करून परिघाचा पृष्ठभाग खरबरीत करितात. सूत कातण्याच्या यंत्रांत अशी योजना असते. रेड्याच्या कातड्यानें मदविलेला ज्याचा परिघ आहे, असें एक मोठें चाक आडवे ठेवून त्या सभोंवती तसल्याच कातड्यानें मदविलेले धाकटे रूळ बसविलेले असतात. येणें करून चाक फिरल्या बरोबर सर्व रूळ फिरतात आणि प्रत्येक रूळ चातीस फिरवितो. असें एक चाक फिरवून अनेक चाल्या फिरवितां येतात. परंतु जेथें यांत्रिक सामर्थ्य फार लागतें त्या ठिकाणीं यारीतीनें काम होत नाहीं. आणि वस्तुतः ज्यांचे पृष्ठभाग केवळ घर्षणानें गति देतील अशीं चाकें ही सहज करितां येत नाहींत, व तीं घांसून घांसून गु-



उगुळीत होतात म्हणून चाकांच्या परिघांच्या पृष्ठभागावर दांत्ये पाडतात व येणेकरून दोहोंमध्ये परस्पर चांगला प्रतिबंध घडून हवी तशी नियमित गति देतां येते.

(१३०) दांत्ये असलेलीं चाके:- चाकांच्या व कण्यांच्या पृष्ठभागामध्ये सतत प्रतिबंध घडावा आणि एकाच्या फिरण्याने दुसऱ्यास नियमित गति देतां यावी, यासाठीं परिघांवर दांत्ये व रवांचा पाडतात. सर्व दांत्ये व रवांचा समान आकाराच्या असतात, व एका चाकाचे दांत्ये दुसऱ्या चाकाच्या कण्याच्या दात्यांत बरोबर बसतात. यामुळे एक चाक एका दिशेने फिरले म्हणजे ते दुसऱ्यास उलट दिशेने फिरविते. पहिल्याचा दांत्या दुसऱ्याच्या रवांचीन बसतो. म्हणून पहिले चाक फिरले म्हणजे रवांचीतून दांत्या बाहेर निघण्यास यत्न करितो त्यावेळी त्यास दुसऱ्या चाकाच्या दांत्याचा प्रतिबंध होतो. त्यास व त्या प्रतिबंधास अतिक्रमण करित असतां तो दांत्या दुसऱ्यास वर ढकलितो, व तेणेकरून दुसऱ्यास उलट दिशेने गति मिळते. याप्रमाणे दुसऱ्याच्या रवांचेनून पहिल्याचा दांत्या बाहेर पडला कीं, दुसऱ्याचा दांत्या पहिल्याच्या रवांचेन शिरतो त्यास बाहेर काढण्यांतही प्रतिबंध होतो, व त्यामुळे दुसऱ्यास गति मिळते. याप्रमाणे दर वेळीं एकेक दांत्या रूढतो. आणि एकाच्या गतीने दुसऱ्यास गति मिळते. दोहोंवरील दांत्ये व रवांचा सारख्या आकाराच्या असतात यामुळे दांत्यांच्या संख्येप्रमाणे त्यांचे फेरे होतात. जर फिरत्या चाकाच्या परिघावर १०० दांत्ये असले आणि दुसऱ्याच्या परिघावर २५ असले तर पहिल्याचा एक फेरा झाला म्हणजे दुसऱ्याचे चार होतील. दुसऱ्यावर ३५ दांत्ये असले तर त्याचे $\frac{100}{35}$ फेरे होतील. यामुळे नियमित दांत्ये पाडून हवी तशी अगदीं नियमित



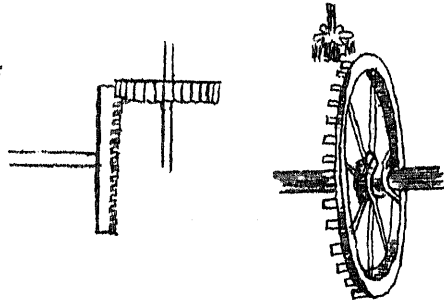
(१९९)

गति देता येने. यामुळे चाकाच्या सांगडीस गति देण्यास आतां साधारणतः दात्यांच्या चकांच उपयोग करितात.

चाके फिरत असतां व दांत्ये एकमेकांजवळून सरत असतां ते एकमेकांवर घांसून झळून येत म्हणून दात्यांस आकार देण्यांत अनेक हिकमती लढवितात. दात्यांस अशा विशेष प्रकारचा आकार देतात कीं, तेणें कळून रस्त्यावर गाडीचे चाक जसें लोटत जातें त्या प्रमाणें दांत्ये एकमेकांजवळून लोटले जातात. नाही तर सतत घर्षणानें व दाबानें दांत्ये झिजून जाते व फार दिवस टिकले नसते.

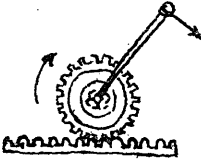
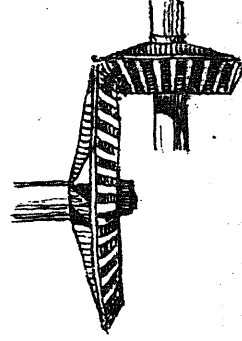
दात्यांची किंवा दंतुरचाके मुख्य तीन प्रकारचीं असतात. ज्याचे दांत्ये परिघावर उभे सुळक्या सारखे आणि त्याच्या पातळींत चाकाच्या मध्यापासून त्रिज्या आल्या प्रमाणें वरील आकृतींत दाखविल्या सारखे असतात. तेव्हां त्या चाकांस कंठकचाके असें नांव देऊं. यांस इंग्रजीत स्परव्हील्स म्हणतात. या रचनेत दोन्ही चाके एकाच पातळीत फिरतात. जेव्हां कण्याच्या किंवा रुळाच्या पृष्ठ भागावर त्याच्या आंसाशीं समांतर असे दांत्ये पाडिले असतील तेव्हां अशा दंतुरचाकास त्यांच्या आकारावरून त्यास किरीट चाक असें नांव देऊं. यास इंग्रजीत क्राउन व्हील म्हणतात. जर असल्या किरीटचाकाच्या दांत्याचे कार्य कंठकचाकाच्या दात्यांवर रचालील आकृतीत दाखविल्या प्रमाणें होईल तर कंठकचाकाचा आंस किरीटचाकाच्या आंसाशीं लंब-

व असेल व कंठक चाकास किरीट चाकाच्या पातळीशीं लंब अशा पातळीत गति मिळेल. कधी कधी दांत्ये पृष्ठ भागावर उभेपण तिकीस म्हणजे चाकाच्या पातळीशीं काहीं कोन करणारे



(२००)

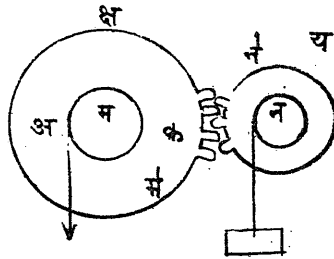
असतान. अशीं चाकें या आकृतीत दाखविलीं आहेत. यांसतिर्यक दात्यांची चाकें असें नांव देऊं. यांस इंग्रजीत बिग्व्हेलव्हील असें नांव आहे. जेव्हा एक सारखी उभी लंबरेपेंत थोडीशी गति आंस फिरवून देणेची असते तेव्हा एका कांबीस दात्ये पाडून त्यावर कंटक चक्राच्या दात्याचें कार्य करिताना कांबीस इंग्रजीत च्याक म्हणतात. असली रचना छोट्या यंत्रांत असते व ती रवाळील आकृतीत दाखविली आहे.



वर सांगितलें त्याप्रमाणेंच अशा सांगडीची यांत्रिकशक्ति काढण्यांत पूर्वी काढलेल्या सारण्यांत परिघांच्या व व्यासांच्या जागी परिघावरील दात्यांची संख्या घेतली म्हणजे झालें. तथापि यंत्रशास्त्राच्या रीतीनें अशा सांगडीच्या समतोलत्वाची सारणी काढण्यांत एवढें लक्षांत ठेविलें पाहिजे कीं, ज्या ठिकाणीं दात्ये असतील त्या ठिकाणीं परिघास शक्ति किंवा वजन लावितां येणार नाहीं. शक्ति आणि वजन ज्या ठिकाणीं दात्ये नाहीत अशा कण्यास किंवा परिघांस लावावीं लागतात.

(१३१) दात्यांच्या चाकांच्या सांगडीच्या समतोलत्वाचा नियम काढणें.

समान आकाराचे दात्ये ज्यांच्या परिघावर पाडलेले आहेत अशा दोन क्ष आणि य चाकांचे म आणि न हे मध्य आहेत. यांच्या क-



ज्यास दोन्यांनीं शक्ति आणि वजन लाविलीं आहेत. दोन्या कण्याच्या परिघांच्या अ आणि व बिंदूंपासून खाली लोंबतात. व यंत्रस्थिर असतां त्या दिक् रेषेत असतील; म्हणून म अ आणि न व हे त्यांवर लंब व होतील.

ज्या त्रिकाणीं दोहोंचे दोन्ये स्पर्श करितान त्या त्रिकाणीं एकाच्या गतीने व दुसऱ्याच्या प्रतिबंधानें जो परस्पर दाब उत्पन्न होईल तो क कल्पिला, तर जेव्हां दोनही चाके समतोल असतील तेव्हां या स्थळीं क घेरेणा दोहों चाकांवर परस्पर उत्कट दिशांनीं कार्य करील ही घेरेणा मक न रेषेत कार्य करित आहे असें घेऊं आणि त्या रेषेवर म आणि न या मध्यांपासून लंब काढून ते म आणि न बिंदूंत यारेषेस मिळतात, असें समजूं.

अ चाक म भोंवति फिरून अ आणि क या घेरेणांनीं समतोल आहे. म्हणून त्यांचीं म भोंवताळचीं भ्रामकत्वे समान असलीं पाहिजेत.

$$\therefore \text{श} \times \text{अम} = \text{क} \times \text{मम}$$

तसेंच न भोंवती फिरणारे चाक व आणि क या घेरेणांनीं समतोल आहे. म्हणून न संबंधीं त्यांचीं भ्रामकत्वे बरोबर असतील.

$$\therefore \text{व} \times \text{बन} = \text{क} \times \text{नन}$$

या समीकरणानें. वरच्या समीकरणास भागून.

$$\frac{\text{श} \times \text{अम}}{\text{व} \times \text{बन}} = \frac{\text{क} \times \text{मम}}{\text{क} \times \text{नन}} = \frac{\text{मम}}{\text{नन}}$$

म, न बिंदूस साधणारी रेषा म न रेषेस क त्रिकाणीं मिळते, असें समजूं. तर मक म आणि नक न हे दोन त्रिकोणं सरूप आहेत.

$$\therefore \frac{\text{मम}}{\text{नन}} = \frac{\text{मक}}{\text{नक}}$$

$$\therefore \frac{\text{श} \times \text{अम}}{\text{व} \times \text{बन}} = \frac{\text{मक}}{\text{नक}}$$

जर चाकांच्या त्रिज्यांच्या मानानं दांत्ये फार लहान असतील तर क बिंदूतच बहुतेक दोहोंचे दांत्ये परस्परांस स्पर्श करतील आणि मक व नक याच रेषा बहुतेक दोहों चाकांच्या त्रिज्या होतील आणि मकन रेषा श आणि व यांच्या दिशांशीं समांतर होईल.

∴ $\frac{म}{व} = \frac{संबंधीं शचे भ्रामकत्व}{वजनाच्या चाकाची त्रिज्या}$

जर दोन्ही कण्यांच्या त्रिज्या समान असतील. आणि साधारणतः असल्या रचनेत शक्ति आणि वजन सारख्या त्रिज्यांच्या कण्यास आवृत्ताने तर अम = बन,

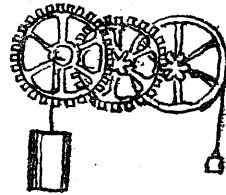
∴ $\frac{श}{व} = \frac{मक}{नक} = \frac{शच्या चाकाची त्रिज्या}{वच्या चाकाची त्रिज्या}$

ज्या पेशां दोहों चाकांचे दांत्ये सारख्या आकाराचे आणि रवांचाही सारख्याच रुंदीच्या असतात म्हणजे दांत्ये सारख्या अंतरावर असतात; यास्तव प्रत्येक चाकावरील दांत्यांची संख्या परिघांच्या प्रमाणांत म्हणून त्रिज्यांच्या प्रमाणांत असेल.

∴ $\frac{श}{व} = \frac{शच्या चाकावरील दांत्यांची संख्या}{वच्या चाकावरील दांत्यांची संख्या}$

या करितां दंतुर चाकांच्या रचनेत शक्तीस जसे वजन तसे शक्ति लाविलेल्या चाकावरील दांत्यांच्या संख्येस वजन लाविलेल्या दांत्यांची संख्या असे प्रमाण असेल.

अनेक दंतुर चाकांची सांगड असली म्हणजे नेहमी पहिल्या चाकास शक्ति आणि शेवटल्या चाकाच्या कण्यास वजन लाविल्यात; चाक व कणे यांच्या त्रिज्या घेतल्या काय आणि त्यांच्या परिघावरील दां-



(२०३)

त्यांची संख्या घेतली काय एकच आहे. म्हणून अशा सांगडीत ही, शक्तीस जसे वजन तसे कण्याच्या परिघावरील दात्यांच्या संख्यांच्या गुणाकारास चाकांच्या परिघावरील दात्यांच्या संख्यांचा गुणाकार असं प्रमाण असेल. जर शक्ति लाविलेल्या चाकावर आणि वजन लाविलेल्या कण्यावर दांत्ये नसले व त्यांच्या त्रिज्या दिल्या असल्या तर बाकी चाकावर विद्यमान अंतरात जिनके दांत्ये असतील त्या माननें दांत्यांची संख्या काढावी.

उदाहरणे

(१) कण्याची त्रिज्या २ इंच असेल तर १० शोरांच्या शक्तीने १६० शोरांचे वजन तोलून धरण्यास चाकाची त्रिज्या किती असावी?

उ. २ फूट ८ इंच.

(२) कण्याची त्रिज्या ३ फूट आणि चाकाची १ फूट असेल तर १२ शोरांचे वजन तोलून धरण्यास किती शक्ति लागेल?

उ. ४ शोर.

(३) संयुक्त कण्याच्या त्रिज्या अनुक्रमे ४ व ३ इंच आहेत आणि चाकाची त्रिज्या ३० इंच आहे तर ७२० शोरांचे वजन असल्यास शक्ति किती पाहिजे?

उ. १२ शोर.

(४) दगड उचलण्याच्या यंत्राचा कणा फिरविण्याचा दांडा २ फूट लांब आहे. कण्याची त्रिज्या २ इंच आहे; याचा दांडा फिरविण्यास ८० शोरांची शक्ति लाविल्यास किती शोरांचे वजन उचलले जाईल?

उ. ७६८ शोर.

(५) तारवाच्या नांगराचा दोर गुंडाळण्याचा उभाफूट २ फूट त्रिज्येचा आहे. या रुळास फिरविण्याच्या ५ फूट लांबीच्या ६ खुं-

तील
आ-
ग हो-
सां-
त्रिज्या
त्रिज्या
धा-
राक-

णे
अं-
परि-

सें
ज-

व्या असून मत्येकीस एकेक मनुष्य ५.६ शेर जोरानें फिरवीत आहे. तर ते ६ मनुष्य केवढें वजन तोलून धरू शकतील?

उ. ८४० शेर.

(६) वरच्या उदाहरणात रुळावर अति कमी दाब पडण्यास शक्ति कशी लाविली पाहिजे.

उ. वजनाचें कार्य ज्या दिशेनें होत असेल त्या दिशेची काढकोन करणाऱ्या दिशेंत.

(७) नांगराची सांखळी गुंडाळण्याच्या रवांची त्रिज्या १ फूट २ इंच आहे व ८ फूट लांबीच्या चार रबुत्यास चार मनुष्ये फिरवीत असून नांगर उचलीत आहेत. मत्येक मनुष्याचा जोर ११२ पोंडाचा आहे. तर नांगराचें वजन किती असेल तें काढ?

उ. $1\frac{13}{16}$ टन.

(८) चाकाची त्रिज्या कण्याच्या त्रिज्येच्या तिपट आहे आणि चाकावरील दोरी १८ शेरांचा ताण सोसण्या जोगी मात्र आहे, तर याचें अत्यंत मोठें असें केवढें वजन उचललें जाईल?

उ. ५.४ शेर.

(९) संयुक्त चाक व कणा या यंत्रांत कणा फिरविण्याचें दांडा २० इंच लांबीचा आहे. कण्याच्या जाड भागाची त्रिज्या ३ इंच आणि बारीक भागाची २ इंच आहे. तर १ शेर जोरानें दांडा फिरविल्यास किती शेरांचें वजन उचललें जाईल?

उ. ४० शेर.

(१०) चार चाकें व कणे यांची सांगड आहे. चारी सारखी असून मत्येक चाकाची त्रिज्या कण्याच्या पांचपट आहे. या सांगडीनें १८७५ पोंडांचें वजन तोलून धरण्यास किती शक्ति लाविली पाहिजे?

उ. ३ पोंड.

(२०५.)

(११) चाकें व कणे यांच्या सांगडींत चाकांच्या त्रिज्या असुक-
में २०, २६ आणि ४८ इंच आहेत आणि कण्यांच्या त्रिज्या ४.५ आ-
णि ८ इंच आहेत जर पहिल्या चाकाच्या परिघावर १ मणाची शक्ति-
लाविली तर शेवटल्या चाकाच्या कण्यावर किती मणाचे ओझे तोंडले
जाईल?

उ. १५.६ मण.

(१२) दात्ये असलेल्या तीन चाकांची सांगड आहे. प्रत्येक चाका-
च्या परिघांत १४४ दात्ये आहेत आणि प्रत्येक कण्यावर ६ आहेत.
तर २ मणाच्या शक्तीने केवढे वजन तोंडलां घेईल?

उ. १३८ खंडी-८ मण.

(१३) १० शोरांच्या शक्तीने ३०० शोरांचे वजन तोंडले आहे.
चाकाचा व्यास १० फूट आहे तर कण्याची त्रिज्या किती असावी? चा-
कावरील दोरीची जाडी १ इंच आहे, आणि कण्यावरील दोरीची जा-
डी २ इंच आहे.

उ. २ $\frac{1}{3}$ इंच.

(१४) १४ शोरांचे वजन कण्यावर काही शक्तीने तोंडून घरले-
आहे. चाकाची त्रिज्या २८ इंच, आणि कण्याची त्रिज्या १६ इंच आहे.
जर या त्रिज्या चार चार इंच कमी केल्या तर त्याच शक्तीने किती शोरां-
चे वजन तोंडले जाईल?

उ. १६ शोर.

(१५) चाक व कणा यांच्या त्रिज्या ८:३ या प्रमाणांत आहेत.
आणि ६ शोर व १५ शोरांची वजने चाक व कणा यांच्या परिघावर ला-
वलेली आहेत. तर कोणते वजन खाली जाईल ते सांग. जे वजन खाली
जाईल त्या खाली टेकावा दिला तर त्यावर आणि चाक व कणा यां-
च्या टेकुंवर किती किती दाब पडेल?

उ. ६ शोरांचे वजन, टेकाव्यावर दाब ३ शोर, टेकुंवर दाब १० $\frac{1}{2}$

(२०६)

(१६) चाक व कणा यांच्या व्यासामधील अंतर $2\frac{1}{2}$ फूट आहे आणि शक्तीच्या ६ पट वजन आहे, तर चाक व कणा यांच्या त्रिज्या काढा?

उ. १८ इंच व ३ इंच.

(१७) चाकाची त्रिज्या कण्याच्या त्रिजेच्या तिप्पट आहे आणि चाकावरील दारी ५६ इंचांचे वजन तोलण्यापुरती मात्र बलकट आहे; तर या यंत्राचे अतिशय मोठे केवढे वजन उचलिते येईल?

उ. १०८ इंच.

फूट आहे
या विजा

३ इंच
आहे. आ
बलकट
येईल
शोर.

प्रकरण १०

कप्पी.

(१३२) कप्पीचा मुख्य उपयोग एका दिशेपासून दुसऱ्या दि-
शेस घेवणा लागू करण्याचा असतो. ही गोष्ट मुख्यत्वेन चुस्त्या दो-
रीने होते. उदाहरणार्थ— जर दोरीच्या एका टोकाम एक वजन बां-
धून दुसरें टोक एका तुळीवरून किंवा गजावरून नेऊन तेंथें घेवणा ला-
गू केली तरी इष्टकार्य सिद्धीस जाईल. परंतु ज्या आधारावरून दो-
री जाते तें फिरतें व गुळगुळीत नसल्यानें पुष्कळ घर्षण होऊन दोरी ल-
वकर क्षिजते. ही अडचण दूर करण्यासाठीं कप्पीचा उपयोग करिता-
त.

(१३३) कप्पी हा एक वाटोळा लांकडाचा किंवा धातूचा च-
पटा तुकडा असून त्याच्या किनाऱ्यावर दोरी राहण्याजोगी रचाल आ-
णि रुंद अशी रवांच पाडकेली असते. या वाटोळ्या तुकड्याच्या मध्यविं-
दूत भोक पाडून त्यांत एक बारीक पण बळकट असा आंस बसविलेला
असतो. या आंसा भोंवती गोल तुकडा म्हणजे कप्पी गरगरा फिरते.
यामुळे कप्पी फिरल्यानें दोरी सरकते म्हणून दोरीचे घर्षण फार थोडें
होतें कप्पीचा आंस एका लांकडी चौकटांत बसविलेला असून त्या
चौकटीच्या वरच्या आंगास व खालच्या आंगास असे आकडे अ-
सतात. वाटोळा तुकडा व त्याचें घर (चौकट) या दोहोंस मिळून क-
प्पी हें नांव आहे; परंतु वास्तविक या दोहोंपासून यांत्रिक स्वार्थ हो-
त नाही परंतु दोरीपासून होतो; आणि केवळ घर्षण नाहीसे करण्या-
स मात्र कप्पीचा उपयोग होतो.

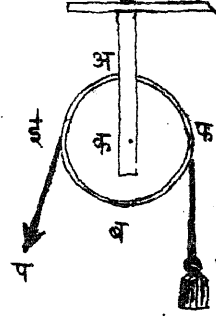
(१३४) कप्पी दोन प्रकारच्या असतात, (१) अचल
आणि (२) चल. अचल कप्प्या आपल्या स्थानापासून हालतना-

(२०८)

हीत. चलकण्या वजनाबरोबर वर स्वाळी जातात.

अचलकणी. या आकृतीत

एक अचल कणी दाखविली आहे. अ. व ही कणी लांकडी चौकटीत स्थिर बसविलेली असून ती क. आसावर फिरणारी कणी आहे. पड फ व ही दोरी कणीच्या खांबेंतून जात आहे.

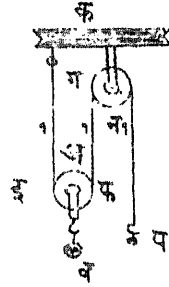
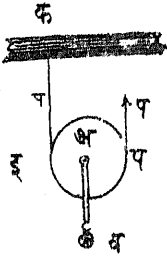


दोरीच्या एका टोंकास व वजन लाविलें आहे. दुसऱ्या टोंकास प प्रेरणा हातानें लाविली आहे. कणीचा आंस अगदी साफ गुळगुळीत असा कल्पित आहे. यामुळे प्रत्यक्ष प्रमाण व प्रमाणें पड फ व या दोरीचा ताण सर्व भागी समान असेल. म्हणून व वजन विवक्षित अवकाशांतून वर उचलण्यास तेवढ्याच जोराची प प्रेरणा तितक्या अवकाशांतून स्वाळी न्यावी लागेल; दोन्ही समतोल राहण्यास प प्रेरणा आणि व वजन सारखी असली पाहिजेत. कारण ही कणी पहिल्या प्रकारच्या उच्चाळकासारखी आहे. यास्तव असल्या कणीत $p = w$ असेल. म्हणून अचलकणीपासून कांहीं यांत्रिकस्वार्थ होत नाही; परंतु अचलकणीच्या योगानें प्रेरणेच्या योजनेची दिशा फिरवितां येते आणि आपलें स्थान न बदलतां कांहीं वजन पाहिजे तितक्या उंचीवर चढवितां येतें. अशा कणीच्या अभावी वजन उंच चढविण्यास मजुण्यास त्या बरोबर चढावे लागेल.

(१३५) एकाच चलकणीच्या यंत्रांत दोऱ्या परस्पर समांतर असल्या तर प्रेरणेच्या दुप्पट वजन तोललें जातें.

अ या चलकणीसालून दोरी नेऊन तिचे एक टोंक क या स्थिर बिंदुस्थळीं अडकविलें आहे आणि दुसऱ्या टोंकास प प्रेरणा लाविली असून त्या प्रेरणें कणी वर लंबाकार उचलली जाते.

किंवा दुरारे वेंक एका च या अचलकप्पीवरून आयून आकृती-
त दाखविल्या प्रमाणें प प्रेरणा लावित त.



जर प प्रेरणें व वजन समताळ राहिलें असेल, तर तें दोहों दों-
यांनीं वर उचललें आहे. समजा कीं, इफ स्थळीं दोरी अ कप्पीस
सर्श करिते, आणि दुसऱ्या आकृतींत ग स्थळीं च कप्पीस सर्श करिते.
तर व वजन कई आणि पफ किंवा गफ या दोन्यांनीं उचलून धरिलें आ-
हेत, आणि त हे या दोन्यांचे अनुक्रमें नाण कल्पिले तर:-

$$त_1 + त_2 = व$$

परंतु प्रत्यक्ष प्रमाण प प्रमाणें कइफप किंवा कइफगप या
दोरीचाताण सर्वत्र सारखा आहे म्हणून

$$प = त_1, \text{ किंवा } प = त_2 = त_3$$

$$\therefore व = २प.$$

दोन्ही दोन्या केवळ व वजनासच तोळून धरितात. असें नसून
अ कप्पीस तिच्या चौकटीसह तोळून धरितात. साधारणतः जेथें
सुद्धा सांगितलें नसेल, त्या ठिकाणीं कप्प्यांचें वजन इतक्य आहे अ-
सें कल्यावयाचें. परंतु बहुतेक सारण्या कप्प्यांचें वजन हिशोबांत धरून
नकावूं. चलकप्पीचें वजन व, कल्पिलेंतर सारणी अशी होईल.

$$व + व_1 = २प \text{ जर } व_1 = ०$$

$$व = २प. \text{ किंवा } प = \frac{१}{२} व$$

(१३६) चलकप्पीस उचलणाऱ्या दोऱ्या परस्पर समांतर नस-

(२१०)

तीळ तर भेरणा आणिवजन यां मधील प्रमाणकाढणे.

अ या कप्पीच्या भोंवती जाणाऱ्या दोरीचा एक शेवट क वि-
दुस्थळीं टांगिला आहे आणि दुसरा शेवट प या भेरणेनें वर ओ-
ढिला जातो. व वजन कप्पीच्या चौकटीस टांगिलें आहे. कड, फप
दोऱ्या परस्पर समांतर नसून त्यांच्या मधील कोन θ आहे.

व वजन कड, फप या
दोहों दोऱ्यांनीं तोलून धरिलें आ-
हे. कड, फप या दोरीचा ताण स-
र्वत्र सारखा आहे. म्हणून कड,
फप या दोहोंचा ताण समान व
तो प भेरणे बरोबर आहे. पाव-
रून असें झालें कीं, कप्पीवर

कड, फप या समान भेरणां
चें कार्य घडत असून त्यास व
या भेरणेनें समतोल धरिलें आहे; म्हणून व भेरणा कड, फप
या भेरणांच्या परिणामी भेरणेबरोबर पण उलट दिशेनें कार्यक-
रणारी भेरणा आहे.

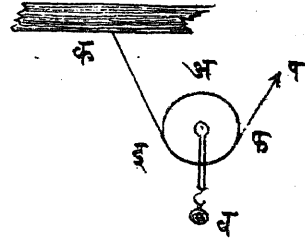
$$\therefore (\text{क. २२ प्रमाणें}) \quad v = 2p \times \text{को.भु.} \frac{\theta}{2}$$

दोहों दोऱ्यांनीं व वजनाबरोबर अ कप्पीचें व, वजन ही तो-
लून धरिलें आहे. म्हणून.

$$v + v_1 = 2p \times \text{को.भु.} \frac{\theta}{2}.$$

(१३७) अनेक चल व अचल कप्प्यांची योजना करून भेरणे-
च्या हवें तितकें पट वजन उचलण्याजोगी रचना करितां येते. याचे मुख्य
तीन प्रकार आहेत.

(१) पहिल्या प्रकारच्या रचनेंत प्रत्येक चल कप्पीस वेगळी दो-
री असून तिचें एक शेवट स्थिर अशा तुळीस टांगिलें असून दुस-



रें शेवट तिच्या वरच्या दुसऱ्या कप्पीस अडकविलेले असते.

(२) दुसऱ्या रचनेत एकाच चौकटीत अनेक कप्प्या बसविलेल्या आहेत अशा दोन चौकटी असून एक अचल व दुसरी चल असते; चल चौकटीस वजन द्यांगिलेले असते. सर्व कप्प्यांवरून एकच दोरी जाते.

(३) तिसऱ्या प्रकारच्या रचनेत प्रत्येक दोरी वजनास अडकविलेली असते.

आतां प्रत्येक प्रकारच्या रचनेत वजन आणि घेवणा यांमध्ये संबंध कसा असतो ते पाहूं.

(१३८) पहिल्या प्रकारच्या रचनेत प्रत्येक कप्पीस लाविलेल्या दोऱ्या परस्पर समांतर असतात. तेव्हां जर n चल कप्प्या असतील तर त्यांच्यासमते ललाचा नियम काढणें.

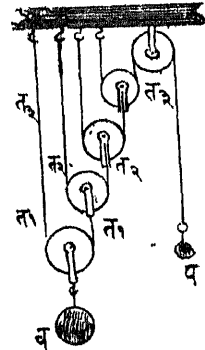
$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ चला कप्प्या आहेत. $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ ही त्यांची वजने आहेत. त्यांस लाविलेल्या दोऱ्यांचे ताण अनुक्रमेण $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ आहेत. अगदी खालच्या A_n कप्पीस व वजन द्यांगिलेले आहे. ते वजन व A_n कप्पीचे वजन तीस लाविलेल्या दोरीने तालून धरिलेले आहे. त्या दोरीचा ताण t_n आहे म्हणून (कलम १३५, प्रमाणे)

$$t_n = \frac{1}{2}(w + w_1) = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}w_1 \quad (१)$$

A_2 कप्पीच्या दोरीने A_1 कप्पीच्या दोरीचा ताण t_1 आणि A_2 कप्पीचे वजन w_2 यांस तालून धरिलेले आहे म्हणून.

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{1}{2}(t_1 + w_2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}w_1 + w_2\right) \\ &= \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 \end{aligned}$$

$$\text{तसेच } t_3 = \frac{1}{2}(t_2 + w_3)$$



(२१२)

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 + v_2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_2$$

$$n_2 = \frac{1}{2} (v_2 + v_2)$$

$$= \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_2$$

या प्रमाणे नव्या कप्पीच्या दोरीचा ताण तन असेल व त्याची किंमत अशी होईल.

$$तन = \frac{1}{2} (तन-1 + वन)$$

$$= \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} व_1 + \frac{1}{2} व_2 + \frac{1}{2} व_2 + \dots + \frac{1}{2} व_n$$

शेवटच्या म्हणजेच नव्या कप्पीच्या दोरीचा ताण मेरणाची लांबी असेल त्याबरोबर असेल. म्हणून.

$$प = तन$$

$$\therefore प = \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} व_1 + \frac{1}{2} व_2 + \frac{1}{2} व_2 + \dots + \frac{1}{2} व_n$$

या समीकरणासून याने गुणून.

$$३प = व + व_1 + २व_2 + २व_2 + २व_2 + \dots + ३^{n-1} व_n \dots (१)$$

ही साधारण सारणी झाली.

आता जर कप्पीची वजनं धरिली नाहीत म्हणजेच, $v_1 = v_2 = v_3$

$\dots = ०$ असे कल्पिले तर.

$$३प = व \dots \dots \dots (२)$$

आणि सर्व कप्पींची वजनं सारखी असली म्हणजेच, $v_1 = v_2$

$= v_3 \dots = व_n$ तर-

$$३प = व + व_1 (१ + २ + २ + २ + \dots + २^{n-1})$$

$$= व + व_1 (३^n - १) \dots \dots \dots (३)$$

$$प = \frac{व}{३} + व_1 - \frac{व_1}{३^n}; \quad प - व_1 = \frac{व - व_1}{३^n}$$

या ठिकाणी कप्पीच्या दोऱ्यांचे शेवट तुळीस बांधिले आहेत. ती स्थळे v_1, v_2, v_3, v_4 इत्यादि असतील तर त्या स्थळी दाब खाली लि-

द्वितीया प्रमाणे असेल. कप्प्यांची वजनं हिशेबांत धरिलीं नाहीत.

$$व_1 = त_1 = \frac{1}{2} व.$$

$$व_2 = त_2 = \frac{1}{3} व.$$

$$व_3 = त_3 = \frac{1}{4} व.$$

$$व_n = त_n = \frac{1}{n+1} व.$$

∴ तुळीवरील एकदर दाब $त_1 + त_2 + त_3 \dots$

$$= व \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n+1} \right) = व (1 - \frac{1}{n+1}).$$

हा दाब आणि शक्ति म्हणजे लांबिलेकी येरणा यांच्या बरेजेब-
रोबर वजन असतं.

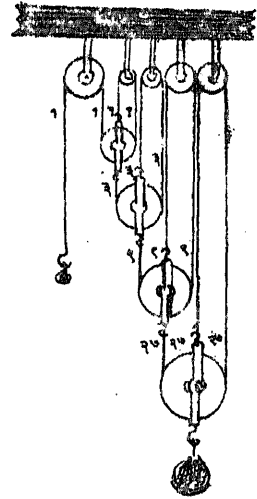
या रचनेत कधी कधी प्रत्येक कप्पीवरील दोरी तुळीस मबांधितां तुळीस दांगिलेच्या एका स्थिरकप्पीवरून रवाळीं आपून त्याच कप्पीच्या चौकटीच्या वरच्या भागीं अडकविलेकी असते. म्हणून प्रत्येक दोरीचे तीन भाग होऊन ते तीन भाग कप्पीस उचलून धरितात. म्हणून प्रत्येक साखणीत २ च्या ठिकाणी ३ याचा उपयोग केला पाहिजे म्हणजे.

$$३^१ प = व.$$

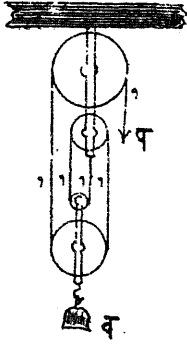
(१३९) दुसऱ्या रचनेत दोन चौकटी असून एकच दोरी सर्व कप्प्यांवरून गान असेल, आणि दोरीचे वेगवेगळे भाग परस्पर समांतर असतील. तेव्हा येरणाच वजन या मधील संबंध काढणें.

वरची चौकट अचल असते. आणि रवाळी चौकट चल असते व निला वजन दांगिलेले असते. तें वजन व कप्प्यांचे वजन

रवाळी चौकटीस जेवढे दोरीचे भाग असतील तेवढ्या दाऱ्यानीं तोळून मधरिले आहे. दोरीच्या एका शेवटास प येरणा लांबिले आहे.



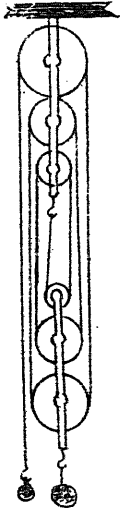
(२१४)



दोरी सलग असल्याने तिच्या सर्व भागां ताण सारखा असेल व प्रत्येक दोरीच्या भागाचा ताण प मेरणे बरोबर असेल. आतां जर रवाळची चौकट एकंदर चार दोऱ्यांनीं तोळून धरिली असेल आणि कप्यांसह रवाळच्या चौकटीचे वजन व, असेल तर.

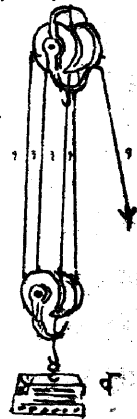
$$व + व_१ = ४प$$

दुसऱ्या आकृतीत दाखविल्या प्रमाणें जर सहा दोऱ्या असतील तर.



$$व + व_१ = ६प$$

प्रत्येक चौकटींत अनेक कप्या बसविण्याच्या बदला एकाच तुकड्यास कप्यासारख्या अनेक रवांचा पाडून तो तुकडा चौकटींत बसवितात. कधीं कधीं सारख्या जाडीचा तुकडा घेऊन सारख्या आकाराच्या रवांचा पाडतात. कधीं कधीं शंकाकार तुकडा घेऊन कमी कमी परिघाच्या अशा रवांचा पाडतात. म्हणजे सारख्या आकाराच्या किंवा कमी कमी व्यासाच्या अशा कप्या एकाजवळ एक अशासमांतर एकमेकांस लावून ठेविल्या प्रमाणें रचना दिसते. पहिल्या प्रकारची रचना आकृतीत दाखविली आहे या रचनेंत दोऱ्यांचे भाग साधारण रचनेंतल्याइतकेच असतात परंतु कप्या सापी व आटपशीर असते. दुसऱ्या प्रकारची रचना पुढील आकृतीत दाखविली आहे या रचनेस व्हाइटची कप्या म्हणतात. दोरीचा एक भाग वजन उचलण्यास जास्त लावून तितका जास्त फायदा होतो. यांत वजन उचलणाऱ्या दोऱ्यांचे

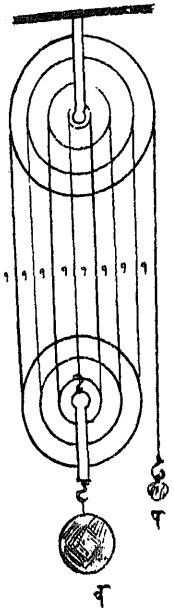


बिली आहे या रचनेंत दोऱ्यांचे भाग साधारण रचनेंतल्याइतकेच असतात परंतु कप्या सापी व आटपशीर असते. दुसऱ्या प्रकारची रचना पुढील आकृतीत दाखविली आहे या रचनेस व्हाइटची कप्या म्हणतात. दोरीचा एक भाग वजन उचलण्यास जास्त लावून तितका जास्त फायदा होतो. यांत वजन उचलणाऱ्या दोऱ्यांचे

वर्ष भागी
 भागाचा
 रवाळची
 असेल
 जनक अ

पणे ज

प्राच्याक
 रवांचा पा
 धीं सार
 ण्या रवां
 घेऊन क
 म्हणजे सा
 प्रा अशा
 न लावून

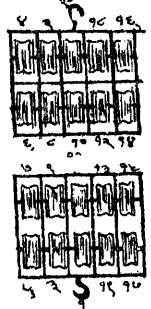


(२१५)

चे भाग विषम असतात.

स्मीटन या इंजिनियराने दोधून काढ-
 लेली रचना याच वर्गीत घेते. ही रचना सर्वात
 बळकट म्हणजे अधिक फायदेकारक आहे.
 तिच्या दोन चौकटी या आकृतीत दाखविल्या
 आहेत. वरच्या चौकटीत १०

आंकडा आहे त्या ठिकाणी दो-
 रीचे शेवट अडकविले असू-
 न १, २, ३ इत्यादि आं-
 कडे मांडले आहेत. त्या रवां-
 ची बरून दोरी जाते २० व्या रवांचे
 वरून गेल्यावर दोरीच्या दुस-
 र्या शेवटास मेरणा लाविलेली असते. या रचनेत



रवाळच्या चौकटीस अडकविलेल्या वजनास तोलून धरणारे दोरीचे भा-
 ग २० असतात. आणि प्रत्येक भागाचे सामर्थ्य मेरणे एवढे असते म्ह-
 णून मेरणेच्या २० पट वजन उचलले जाते. ज्या तुळीस वरची चौकट
 रांगलेली असते तिच्यावर मेरणेच्या २१ पट दाब पडते.

जर दोऱ्यांनी वजनासह रवाळची चौकट तोलून धरिली अ-
 सेल तर.

$$व + व_१ = नप. \therefore प = \frac{व + व_१}{२}$$

$$व_१ = ०; \text{ तर } व = नप; प = \frac{न}{२}$$

जेव्हा दोरीचा दुसरा शेवट वरच्या चौकटीतील कपीस अडकविला
 असेल, तेव्हा दोऱ्यांची संख्या सम असते व रवाळच्या चौकटीस अडक-
 विला असेल तेव्हा ती संख्या विषम असते. वरची चौकट तुळीस रांगिली
 आहे त्या ठिकाणी वजनास लाविलेल्या सर्व दोऱ्यांचे भाग आणि मेरणा

व

(२१६)

ज्या भागास लाविली आहे तो भाग या सर्वांचा दाब पडतो. म्हणून तेथे $w + p$ दाब पडतो.

(१४०) तिसऱ्या रचनेत प्रत्येक कप्पीवरील दोरीचे एक शेवट वजनाने अडकविलेले असते, व दुसरे त्या रवाळील कप्पीस अडकविलेले असते. अगदी रवाळच्या कप्पीवरील दोरीचे एक शेवट वजनाने अडकविलेले असून दुसऱ्या शेवटास प्रेरणा लाविलेली असते. अगदी वरची कप्पी अचल असून बाकी सर्वांचे चल असतात. अशा रचनेत प्रेरणा व वजन यांमधील संबंध काढणे आहे.

ज्यास सर्व कप्प्यांच्या दोऱ्या लाविल्या आहेत ते वजन w आहे. अगदी रवाळच्या कप्पीवरील दोरीच्या शेवटास p प्रेरणा लाविली आहे.

w_1, w_2, w_3, w_4 ही रवाळच्या कप्पीपासून कप्प्यांची अनुक्रमे वजने आहेत.

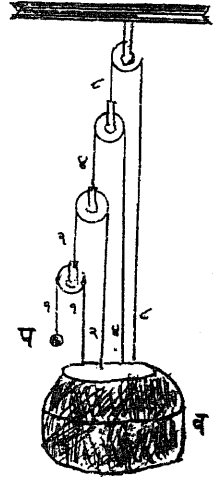
घांजवरील दोऱ्यांचे ताण अनुक्रमे t_1, t_2, t_3, \dots इत्यादि आहेत. एकंदर n कप्प्या आहेत, व त्यांपैकी $n-1$ चल आहेत.

w वजन सर्व दोऱ्यांनी तालून धरिले आहे.

$$\therefore w = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$$

आतां t_1, t_2, t_3, \dots यांचा संबंध प्रेरणेशीं कसा आहे ते पाहू. साकरितां प्रत्येकाची किंमत काढिली पाहिजे.

दा रवाळच्या कप्पीवरील दोरी p प्रेरणेच्या सामर्थ्यानें ताणली आहे म्हणून तिचा ताण $t_1 = p$ आहे. त्यावरील कप्पीच्या दोरीच्या एका शेवटास त्या रवाळची कप्पी अडकविली आहे म्हणून तिनें रवाळच्या कप्पीस तालून धरिले आहे. $\therefore t_2 = 2t_1 + w_1 = 2p + w_1$. तिसऱ्या कप्पीवरील दोरीस दुसरी कप्पी टांगिलेली आहे. म्हणून.



(२१७)

$$t_2 = 2t_1 + v_1 = 2^2p + 2v_1 + v_2$$

अथवा कर्पीवरील दोरीचा ताण असा असेल

$$t_3 = 2t_2 + v_2 = 2^3p + 2^2v_1 + 2v_2 + v_3$$

या प्रमाणे न कथ्या असल्यास न कथ्या कर्पीवरील दोरीचा ताण असा होईल.

$$t_n = 2^{n-1}t_1 + t_{n-1} = 2^{n-1}p + 2^{n-2}v_1 + 2^{n-3}v_2 + 2^{n-4}v_3 + \dots + v_{n-1}$$

म्हणून.

$$t_1 = p$$

$$t_2 = 2p + v_1$$

$$t_3 = 2^2p + 2v_1 + v_2$$

$$t_4 = 2^3p + 2^2v_1 + 2v_2 + v_3$$

$$t_n = 2^{n-1}p + 2^{n-2}v_1 + 2^{n-3}v_2 + 2^{n-4}v_3 + \dots + v_{n-1}$$

यांची बेरीज घेऊन.

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots + t_n = p(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}) + v_1(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2}) + v_2(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-3}) + \dots + v_{n-1}$$

$$\text{परंतु } t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n = v$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$$

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-3} = 2^{n-2} - 1$$

$$\therefore v = p(2^n - 1) + v_1(2^{n-1} - 1) + v_2(2^{n-2} - 1) + \dots + v_{n-1} \dots (१)$$

(अ) जर कथ्यांचे वजन हिशोबांत धरिले नाही, म्हणजे जर.

$$v_1 = v_2 = v_3 = \dots = 0$$

तर.

$$v = p(2^n - 1) \dots \dots \dots (२)$$

(२) जर सर्व कथ्यांचे वजन समान असेल, म्हणजे जर

पूजने

क शेवट

अडक

वजना

सते अ

राचनेत

व आहे.

आहे.



स त्या
स तो-
तिस

$$v_1 = v_2 = v_3 \dots \dots \dots$$

तर-

$$v = p(2^{n-1}) + v_1(2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} \dots \dots + 2) - v_1(n-1)$$

$$v = p(2^{n-1}) + v_1(2 + 2^2 \dots \dots 2^{n-1}) - v_1(n-1)$$

$$= p(2^{n-1}) + v_1(2^{n-1} - 1) - v_1(n-1)$$

$$= p(2^{n-1}) + v_1(2^{n-1} - n + 1)$$

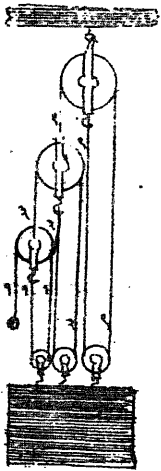
$$= p(2^{n-1}) + v_1(2^{n-1} - n + 1) \dots \dots \dots (३)$$

या रचनेत ज्या ठिकाणी अचलकणी टांगिली असेल त्या ठिकाणी

दाव $v + p + v_1 + v_2 + v_3 \dots \dots v_n$ असेल.

(१४१)

प्रत्येक कणीवरील दोरीचा शेवट वजनास न अडकवितो खालील आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे दुसऱ्या एका कणीवर



रून नेऊन पहिल्या कणीच्या खालच्या आंकड्यास लाविलेला असतो. या प्रमाणे प्रत्येक कणीवरील दोरी दुसऱ्या एका कणीवरून नेऊन तिच्या खालच्या आंकड्यास अडकविलेली असते. आणि खालच्या कण्यांच्या आंकड्यास वजन टांगलेले असते. यांत वजन एक दोरीच्या जागी दोन दोन दोऱ्या लागतात. यास्तव वरच्या सारणीतील २ च्या ठिकाणी ३ लिहिले म्हणजे त्याच सारण्या या रचनेतील प्रेरणा व वजन यांमधील संबंध दाखविलेली.

$$v = p(2^{n-1}) + v_1(2^{n-1}) + v_2(2^{n-2}) + \dots + v_n \dots (१)$$

$$v = p(2^{n-1}) \dots \dots \dots (२)$$

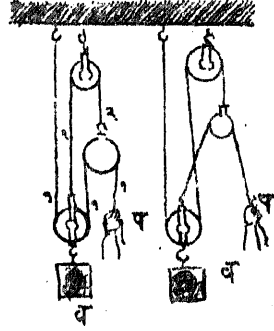
$$v = p(2^{n-1}) + v_1(2^{n-1} - n + 1) \dots \dots \dots (३)$$

(१४२) आणखी दोन प्रकारच्या कण्यांच्या रचना असतात. त्या

खालील दोन आकृतीत दाखविल्या आहेत. यांस स्थानिशा-

बर्टन म्हणतात. प्रत्येकीत दोन दो-
या व दोन चलकप्पा आहेत.

पहिल्या रचनेत दोनचलक-
प्यांवरून गेलेल्या दोरीचे दोन भा-
ग वजन तोलण्यास लागलेले आहे.
तु, व या प्रत्येक भागाचा ताण प्रे-
रण इतका आहे. अचलकप्पीवरी-
ल दोरीचा एक शेवट रवालच्या च-



लकप्पीस म्हणजे वजनास अडकविला आहे, व तुसच्या शेवटाने तु-
सणी चलकप्पी उचलून धरिली आहे. म्हणून इच्या प्रत्येक भागा-
चा ताण प्रेरणेच्या दुप्पट आहे. यासच दुप्पट ताणाच्या दोरी-
चा एक भाग आणि एकपट ताणाच्या दोरीचे दोन भाग वजनास तो-
लून धरितात. म्हणून कप्याचे वजन हिशेबांत धरिले नाहीतर-
व = ४प आणि ज्या ठिकाणी दोरीचा शेवट तुळीस रांगिला आहे
त्या ठिकाणी दाब प आणि ज्या ठिकाणी अचलकप्पी रांगिली जा-
हे त्या ठिकाणी दाब ४प असेल.

आतां चलकप्यांची वजने हिशेबांत धरून रवालच्या चलक-
प्यांचे वजन व_१ आणि वरच्या चलकप्पीचे वजन व_२ आहेत. व वज-
न आणि रवालच्या चलकप्पीचे व_१ वजन रवालच्या कप्पीस लाविले-
ल्या तीन दोऱ्यांनी तोलून धरिले आहे. चलकप्यांवरील दोरीच्या भा-
गांचे ताण प बरोबर आहेत. अचलकप्पीवरील दोरीच्या एक शेवटा-
ने वरच्या चलकप्पीस उचलून धरिले आहे. म्हणून त्या दोरीच्या प्र-
त्येक भागाचा ताण २प + व_२ झाला. असला एक भाग वजना-
स लागला आहे म्हणून-

$$व + व_१ = २प + २प + व_२ = ४प + व_२.$$

दोरी तुळीस रांगिल्या ठिकाणी दाब प च असेल. परंतु अ-

(२२०)

चलकपी टांगिल्या ठिकाणीं दाब $४प + २व_२$ असेल.

दुसऱ्या रचनेंत वरच्या चलकपी वरील दोरीच्या एका शेवटास मेरणा लाविली आहे व दुसरें शेवट रवाळच्या चलकपीस अडकविलें आहे. परंतु हें वांकडें असल्यामुळें दोरीच्या या भागांनें प मेरणे एवढ्या जोरांनें वजन उचललें जाणार नाहीं. या मेरणेचालव दिशेंत जो पृथग्भूत भाग घेईल, तेवढ्या जोरांनें मात्र उचललें जाईल. या दोरीच्या दोहोंभागांमधील कौनश्च असला तर हा पृथग्भूत भाग पको भु. ७ होईल. दुसऱ्या दोरीचें एक शेवट दुसऱ्या चलकपीस उचलून धरिते म्हणून त्याचा ताण $२प$ को भु. ७ होईल (क. २१ पहा.) ही दोरी अचलकपीवरून रवाळच्या चलकपी रवाळून गेली आहे म्हणून हिचे दोन भाग वजनास उचलित आहेत, व प्रत्येक भागाचा जोर $२प$ को भु. ७ आहे, म्हणून कप्यांची वजनें हिशबांत घेतलीं नाहींतर $व = २प$ को भु. ७ + $२प$ को भु. ७ + पको भु. ७ = $५प$ को भु. ७ असेल आणि दोरी टांगिली आहे त्या ठिकाणीं तुळीवर दाब $२प$ को भु. ७ व अचलकपी टांगिली आहे त्या ठिकाणीं $४प$ को भु. ७ असेल. कप्यांची वजनें $व_१$ आणि $व_२$ असलीं, तर

$$व + व_१ = ५प को भु. ७ + २व_२$$

असेल; दोरी टांगिल्या ठिकाणीं दाब $२प$ को भु. ७ + $व_२$ आणि अचलकपी टांगिल्या ठिकाणीं दाब $४प$ को भु. ७ + $२व_२$ असेल.

जर दोरीचा वांकडेपणा मनांत आणिल्ला नाहीं तर वजन मेरणाच्या पांचपट असेल.

उदाहरणें

(१) एकच चलकपी असून तिजवरील दोऱ्या परस्पर स-

(२२१)

मांतर असतील तर घेरणे बरोबर वजन असण्यास त्यांमध्ये केवढा कोन असला पाहिजे?

उ-१२०°

(२) एकच चलकप्पी असल्यास तिचे वजन घेरणे हून कमी असल्या शिवाय तिजपासून यांत्रिकस्वार्थ मिळणार नाही, असे सिद्ध कर?

(३) एका चलकप्पीचरील दोरीच्या दोहों भागांमधील कोन 60° असिल, तर समतोलत्वास घेरणा आणि वजन यांमध्ये काय प्रमाण असले पाहिजे?

उ-१: $\sqrt{3}$.

कप्प्यांची पहिली रचना.

(४) तीन चलकप्प्या असून अगदीं खालच्या कप्पीस २४ शेरांचे वजन टांगिले आहे, तर त्या वजनास तालून धरण्यास किती शेरांची घेरणा लाविली पाहिजे? कप्प्यांची वजनें हिशेबांत घराबयाची नाहीत.

उ- ३ शेरा.

(५) चार चलकप्प्या पहिल्या रचनेप्रमाणे जोडलेल्या आहेत, त्यांची वजनें अनुक्रमे २, ५, ३, ६ शेरा आहेत तर ४३ शेरांच्या घेरणेने केवढे वजन तालले जाईल?

उ- ६, १४ शेरा.

(६) तीन चलकप्प्या पहिल्या रचनेप्रमाणे जोडलेल्या आहेत, अगदीं खालच्या कप्पीस ५ शेरांचे वजन टांगिले आहे. प्रत्येक कप्पीचे वजन ३ शेरा असले, तर घेरणा केवढी लाविली पाहिजे?

उ- $3\frac{1}{2}$ शेरा.

(७) पहिल्या प्रकारच्या रचनेत चार चलकप्प्या आहेत व त्यांचा

(२२२)

वजनं अनुक्रमेण १, २, ४, ८ पौंडं आहृतं आणि वजन १६० पौंडं आहे, तर प्रेरणा किती असली पाहिजे?

उ- १२ पौंडं.

(८) पहिल्या रचनेत ३ चळकण्या आहेत. आणि प्रत्येकीचे वजन ४ आहे आणि अगदी खालच्या कप्पीस मुळीच वजन द्या गिले नाही, तर समतोलत्व राहण्यास प: व: :: ७:८ हे मसाले पाहिजे असे दाखवा.

(९) प्रेरणा व वजन सारखी असतील तेव्हा सारख्या वजनाच्या ३ चळकण्या पहिल्या रचनेत असल्यास प्रत्येकीचे वजन किती असले पाहिजे?

उ- व.

(१०) अगदी खालच्या कप्पीशिवाय बाकी कण्या गुरुत्वहीन आहेत, असे कल्पिले आणि खालच्या कप्पीचे वजन प शेर व प्रेरणा ही प शेर असेल, आणि लाविलेले वजन व शेर असेल, तर असे सिद्ध करू की कितीही कण्या असल्या तरी व वजनाच्या बरोबर असते.

दुसरी रचना.

(११) एकच दोरी सर्व कण्यांच्या खांचीवरून जात आहे व दोरीचे भाग दिके रेषेत आहेत. अशा रचनेत जर खालच्या चौकटीत तीन कण्या असल्या आणि कण्यांसह चौकटीचे वजन ८ शेर असेल, तर ११२ शेरांचे वजन तोलण्यास किती प्रेरणा असली पाहिजे?

उ- २० शेर.

(१२) खालच्या चौकटीत ३ कण्या असतील. व कण्यांसह चौकटीचे वजन ८ शेर असेल आणि दोरीच्या एका शेवटास २ शेर

रांची मेरणा लाविलेली असून तिचे दुसरे शेवट रवाळच्या चौकटीस अडकविलेले असेल, तेव्हां किती वजन तोलले जाईल.

उ-६ शेर.

१६० पौंड

पौंड.
मत्येकीचे
व वजन वं
८ हे मभा

ख्या वज-
तीचे वजन

व.
गुरुत्वद्वारा
शेर व म-
सेल; तर अ-
प च्या वि-

आहे व
लच्या चौ-
वजन ८

गा अस-

० शेर.

प्यांसह चौ-

गस ३ शेर

(१३) एक मनुष्य कण्यांच्या खांचीतून जाणाऱ्या दोरीच्या शेवटास खाली ओढून आपल्या निम्मे वजन कण्यांस टांगलेले तोलून घेतली आहे. वरची चौकट छतास टांगली आहे, व रवाळच्या चौकटीस ७ दोऱ्यांचे भाग आहेत, तर ज्या जमिनीवर मनुष्य उभा आहे तिजवर त्याचा दाब किती पडून आहे ते काढू ?

उ- त्याच्या वजनाचे $\frac{1}{3}$.

(१४) रवाळच्या चौकटीस ३ कण्या आहेत, आणि दोरीचा शेवट वरच्या चौकटीस अडकविलेला आहे. रवाळच्या चौकटीचे वजन मेरणाच्या तिप्पट आहे. तर मेरणाच्या किती पट वजन तोलले जाईल ?

उ. मेरणाच्या ३ पट वजन.

(१५) रवाळच्या चौकटीचे वजन ५ शेर आणि मेरणापु शेर आणि रवाळच्या चौकटीस टांगलेले वजन ५ शेर असेल तर असे सिद्ध करा की, जेव्हा दोरीचा शेवट वरच्या चौकटीस टांगला असेल, तेव्हा पच्या विषमपट व संख्या असते आणि रवाळच्या चौकटीस टांगलेले असेल तेव्हा समपट असते.

तिसरी रचना.

(१६) तिसऱ्या रचनेत सारख्या वजनांच्या सहा चतकण्या आहेत. जी दोरी वजनास लाविलेली आहे तीच प्रत्येक कण्यास अडकविलेली आहे, तर काही मेरणा मलाविता वजन समतोल राहण्यास प्रत्येक कण्याचे वजन वजनाचा कितवा भाग असला पाहिजे ?

उ- $\frac{1}{3}$.

(२२४)

(१७) तिसऱ्या रचनेने ६ चलकण्या आहेत तर ५०१ शेरांचे वजन तोळण्यास मेरणा किती असली पाहिजे?

उ- ८ शेर.

(१८) तिसऱ्या रचनेतील ५ कण्यांची स्वाळच्या कप्पी वरून वजन ३, ४, ५, ६ शेर आहेत, तर २४ शेरांच्या मेरणेने केवढे वजन तोळले जाईल? आणि ७२८ शेरांचे वजन तोळण्यास केवढी मेरणा लावावी लागेल?

उ- वजन ३९८ शेर; मेरणा ४६ शेर.

(१९) ४, ८, १२, १० पौंड वजनाच्या चार कण्या पहिल्या रचनेत अत्यंत फायदेकारक अशा क्रमाने लाविल्यास १०० शेरांच्या मेरणेने केवढे वजन तोळले जाईल?

उ- १५२६ शेर.

(२०) याच कण्या अती कमी फायदेकारकरीतीने पहिल्या रचने प्रमाणे जोडिल्यास १०० शेरांच्या मेरणेने केवढे वजन तोळले जाईल?

उ- १४७६ शेर.

(२१) याच कण्या तिसऱ्या रचनेत अत्यंत फायदेकारक अशा क्रमाने जोडिल्यास १५९८ शेरांचे वजन तोळण्यास केवढी मेरणा लाविली पाहिजे?

उ- १०० शेर.

(२२) ३० पौंड मेरणेने १६५८ शेरांचे वजन उचलण्यास प्रत्येक कप्पी ६ शेरांची अशा पहिल्या रचनेत किती कण्या लाविल्या पाहिजेत?

उ- ६ कण्या.

(२३) तिसऱ्या रचनेप्रमाणे ८ कण्या जोडलेल्या आहेत,

५ शेरानें व-

शेर.

सी वरून व-

केवढें वजन

केवढी मेर-

६.

हिल्यारच-

• शेरानेंच्या

शेर.

पहिल्या
वजन तौल-कारक अ-
स केवढी

०० शेर.

वळव्यास
कप्याला

कप्या.

आहेत,

तर मेरणा लाविल्याशिवाय केपळ कप्यांच्या वजनाचीच वजन तौललें जाण्यास
प्रत्येक कप्यांचें वजन वजनाचा निम्नवा भाग असलें पाहिजे.

उ. २४३ भाग.

प्रकरण ११

उतरण आणि पाचर.

(१४३) सर्व मुळ यंत्रांत उतरण हें फार साधें यंत्र आहे. फार उंचीवर एकादें मोठें वजन चढविण्याचें असलें, म्हणजे याचा उपयोग करितात. कारण जर काहीं उंचीवर ५०० शेर वजनाचें ओझें चढविण्याचें असलें आणि कोणत्याही यंत्राचा उपयोग केला नाही तर ५०० शेरान्ची शक्ति स्वर्च करावी लागेल. परंतु उतरणीच्या सहाय्यानें कमी शक्तीनें मोठें वजन चढविलां येतें, आणि येणेंकरून यांत्रिक स्वार्थ होतो. उतरणीवर विवक्षित वजन तोडून धरण्यास किति शकिल्लेगेल, व ती उतरणीच्या अवयवांशीं कोणत्या प्रमाणांत असले हें काढणें.

उतरण ही एक सपाटी असून ती क्षितिज मर्यादेच्या सपाटीशीं कोन करिते. ज्या प्रमाणें हा कोन लहान मोठा असेल. त्या प्रमाणें उतरणीचें दुसरें टोंक चर उचललें जाईल; म्हणजे या कोनाच्या मानानें उतरणीची उंची आणि लांबी यां मधील प्रमाण असेल.

एक मोठीशी फळी जमिनीवर एकादेंकानें टेंकून दुसऱ्या

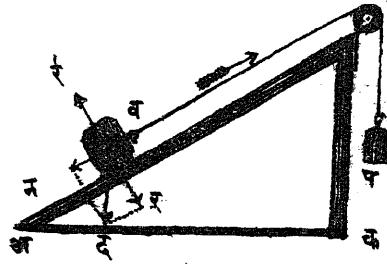
(२२६)

टोकानें वर उचलून तिकिस धरिली म्हणजे ती उतरण झाली. आता फळीची लांबी कायम आहे तिचे दुसरे टोक ५, १०, २५ किंवा ५० वर उचलवे त्या प्रमाणें उंची वाढेल, आणि उंची व लांबी यांमधील प्रमाण कमी कमी होत जाईल.

(१४४) सपाट पातळीवर जर एकादा पदार्थ ठेविला तर त्याच्या वजनाचा दाब रवाळच्या दिशेकडे लंबाकार पडेल. आणि पातळीच्या वरचा दिशेकडे लंबाकार तितक्याच जोराचा प्रतिबंध होईल. दोन्ही प्रेरणा परस्पर समान व उलट असल्याने पदार्थ स्थिर राहिल. परंतु जर उतरणीवर तो पदार्थ ठेविला तर पदार्थ रवाळच्या दिशेकडे लंबाकार पृथ्वीनें भक्कपिल जाईल. आणि उतरणीच्या पातळीचा प्रतिबंध उतरणीच्या सपाटीशीं लंबाकार होईल, म्हणून वरच्या उलट दिशेस होणार नाही, यामुळे त्यानें सर्व पदार्थ तोंडला न जाणतां पदार्थ रवाळीं सरकेल, आणि त्यास स्थिर ठेवण्यास कांहीं शक्ति उलट दिशेस लावावी लागेल. ही शक्ति उतरणीच्या लांबीशीं समांतर किंवा तिच्या पायाशीं समांतर किंवा उतरणीच्या सपाटीशीं कोणता तरी कोन करणारी अशी लाविता येईल. या तिन्ही रीतींत प्रेरणा आणि वजन यामध्ये संबंध काय असतो हे काढिलें पाहिजे.

उतरणीस लंबाकार कापिलें असता बाजूनें जशी दिसेल त्याचें चित्र रवाळीं अब-

क दाखविलें आहे. त्यांत अब जी उतरणीची सपाटी निला तिची लांबी म्हणतात. ती आम्हीं ल या अक्षराने दर्शवूं. बक ही तिची उंची आहे. ती उ या



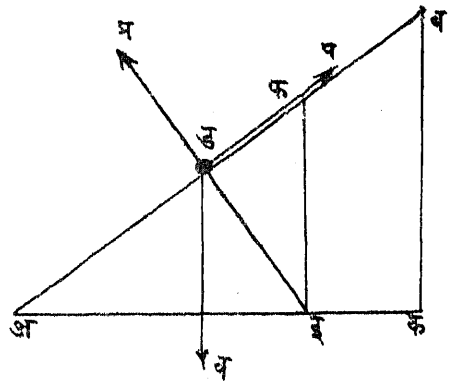
अक्षराने आणि अक तिचा पाया किंवा तळ त या अक्षराने द-

आतां
वाः
थील
- तर
गे पा
- हो-
स्थिररा
रा दि-
घातबी-
वरच्या
न जाव
: शक्ति
समांत-
र्षीं को-
तीतमे-
हिजे.
सेल

इवून आणि क अब हा जो कोन उतरणीची सपाटी पायाशी किंवा तळा-
शी करिते त्यास उतरणीचा कळ म्हणतात. या उतरणीवर जर वजन
वेविलें तर त्याजवर गुरुत्वाकर्षणाचें कार्य बद्ध रेषेत होईल. परंतु त्या रे-
षेत ज्या जोरानें वजन खाली येईल त्याच जोरानें उतरणीवरून खालीं
सरकणार नाही, या जोराचा किंवा मेरणाचा एका पृथग्भूत भागानें प-
दार्थ खाली सरकेल बद्ध मेरणाचें वजन अबशीं समांतर आणि तिशीं
काटकोन करणारी वर अशा दोन मेरणांत पृथक्करण केले तर वन
मेरणाचें पदार्थ खालीं सरकेल. आणि वर मेरणाचें उतरणीच्या स-
पाटीवर दाब पडेल. या त्याच रेषेत उलट दिशेनें उतरणीच्या सपा-
टीचा तेवढाच प्रतिबंध होईल. वन मेरणाचें पदार्थ खालीं सरके-
ल त्यास सरकून न देण्याकरितां मेरणाळावितान्त.

(१४७) जेव्हां उतरणीवर वजनास तालून धरणारी मेरणा
उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करिते तेव्हां मेरणा आ-
णि वजन यांजमधील संबंध काढणें.

समजा कीं अ
ब क उतरणीवर व
वजनाचा तु पदार्थ
अब सपाटीशीं स-
मांतर दिशेंत कार्य
करण्या प मेरणा-
नें तालून धरिला आ
हे. तर प आणि व
यांमध्ये काय संबंध
असेल, तो काढणें आ
हे.



तरानेंद

तु पदार्थावर तीन मेरणांचें कार्य घडून तो पदार्थ स्थिर रा-

हिला आहे. त्याचें वजन डुव दिशेंत कार्य करीत आहे. ती मेरणाव
या अक्षरानें दर्शवूं. अब सपाटीचा मतिबंध सपाटीशीं लंब अ-
शाड म दिशेंत कार्य करितो; आणि प मेरणाडुप दिशेंत कार्य क-
रिते. या तीन मेरणांनीं पदार्थ समतोल आहे. यास्तव मेरणा त्रिकोणाच्या
सिद्धांताप्रमाणें या मेरणांच्या दिशा ज्या त्रिकोणाच्या बाजूंशीं समां-
तर आहेत त्या त्रिकोणाच्या बाजू या मेरणांशीं सम प्रमाणांत अ-
सतील.

डुप रेखा डुकडे अक स डू स्थळीं मिळिपर्यंत वाटीव आणि डू
पासून डफरेखा डुवशीं समांतर काढ. ती डुप स फू स्थळीं मिळते.
डु डू फ त्रिकोणाच्या डफ, फ डू, आणि डू डू बाजू प, व आणि म
या तीन मेरणांच्या दिशांशीं समांतर आहेत म्हणून प: व: म::
डफ: फ डू: डू डू. परंतु डफ डू त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं सम
प आहे. कारण \angle अकव काटकोन = \angle फ डू डू काटकोन,
 \angle डफ डू = \angle अबक आणि बाकी \angle डू डू फ = \angle वअक.

यास्तव डफ: फ डू: डू डू:: वक: अब: अक.

∴ प: व: म:: वक: अब: अक:: उ: ल: त.

∴ $\frac{प}{व} = \frac{उ}{ल}$; $\frac{प}{म} = \frac{उ}{त}$; $\frac{व}{म} = \frac{ल}{त}$.

यावरून प आणि व यांचें प्रमाण उंची आणि लांबी यांच्या
प्रमाणा बरोबर असतें; किंवा पदार्थास तेलून धरणाऱ्या तिन्ही मेरणा
उतरणीच्या तिन्ही बाजूंशीं प्रमाणांत असतात.

(१४६) जेव्हां पदार्थास तेलून धरणारी मेरणा उतरणीच्या
पायाशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करिते तेव्हां मेरणा आणि प-
दार्थाचें वजन यां मधील संबंध काढणें.

समजा कीं अबक उतरणीवर व वजनाच्या डू याप-
दार्थास अक शीं समांतर अशा डुप दिशेंत कार्य करणाऱ्या प मेर-

(२२९)

जेसे तोलून धरिले आहे. ड पदाथचि वजन डव दिशेने पृथ्वीकडे आ-

कषिले जाईल. आ-

णि अब शी लंब

अशा डम दिशेने

अब उतरणीचा म-

तिबंध होईल. यांस

व आणि म ही नां

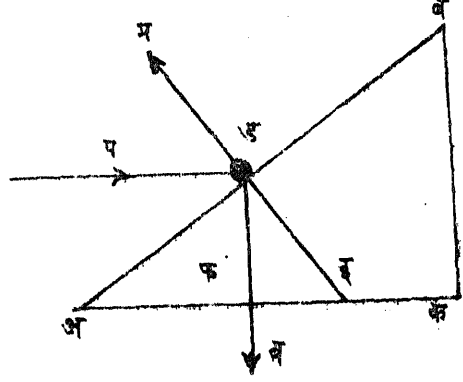
वे देऊं, तर प, व आ-

णि म यातीन मेरणां

नीं ड पदाथसि सम-

तोल धरिले आहे. डम रेषा ड कडे वाढीव ती अक स ई स्थळीं पिल-

ते आणि डव रेषा अक स फ स्थळीं मिकते.



आतां डफ ई त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू प, व, म या मेरणांच्या दिशांशीं समांतर आहेत. म्हणून (क: ३०) प्रमाणें.

प: व: म:: फई: डफ: डई.

परंतु डफ ई त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं सरूप आहे का-

रण \angle डफई काटकोन = \angle अकब काटकोन आणि \angle अ +

\angle अडफ = १ काटकोन = अडफ + \angle फडई :: \angle अ =

\angle फडई आणि बाकी \angle व = \angle डईफ.

∴ यु: पु: ६: सि: प्रमाणें.

फई: फड: डई: : बक: अक: अब.

∴ प: व: म: : बक: अक: अब: : उ: त: ल.

$$\frac{प}{व} = \frac{उ}{त}; \frac{प}{म} = \frac{उ}{ल}; \frac{व}{म} = \frac{त}{ल}.$$

या ठिकाणीं मेरणा आणि पदाथचि वजन यां मधील प्रमाणा उंची आणि तळ यांच्या प्रमाणा बरोबर असतें. परंतु तिन्ही मे-

(२२१)

त.
ग
ः

प प्रेरणेची दिशा उतरणीच्या अव सपाटीशीं घं कोन करिते जा-
णि उतरणीचा कल. ब अक = ९

प, व, म प्रेरणा समतोल आहेत म्हणून. (क = ३३ प्रमाणें.)

प: व: म: : भुज / व म: भु / प म: भु / प व.

:: भु (१०० - ९) : भु (९० + ९) : भु (९० + ९ + ९)

प: व: म: : भु ९ : को भु ९ : को भु (९ + ९)

प $\frac{\text{भु ९}}{\text{व को भु ९}}$; म $\frac{\text{भु ९}}{\text{को भु (९ + ९)}}$; व $\frac{\text{को भु ९}}{\text{को भु (९ + ९)}}$

(१) जेव्हां प प्रेरणा उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर अशी का-
री करिते तेव्हां स = ०

:: प: व: म: : भु ९ : को भु (०) : को भु (९)

:: भु ९ : १ : को भु ९

नी

प $\frac{\text{भु ९}}{\text{व को भु ९}}$; म $\frac{\text{भु ९}}{\text{को भु ९}}$; व $\frac{१}{\text{को भु ९}}$

जु

प $\frac{\text{बक उ}}{\text{व अव ल}}$; म $\frac{\text{बक उ}}{\text{अव ल}}$; अक $\frac{\text{बक उ}}{\text{अक त}}$

हीं

आणि $\frac{\text{व अक अव ल}}{\text{म अव अक त}}$

र-

(२) जर प्रेरणा उतरणीच्या पायाशीं समांतर दिशेंत कार्य करी-
त असेल तर-

घ = ९ असेल.

:: प: व: म: : भु ९ : को भु (-९) : को भु (९ + ९)

प: व: म: : भु ९ : को भु ९ : १

१

प $\frac{\text{भु ९}}{\text{व को भु ९}}$; म $\frac{\text{भु ९}}{\text{को भु ९}}$; व $\frac{१}{\text{को भु ९}}$

क

प $\frac{\text{बक उ}}{\text{व अव ल}}$; अक $\frac{\text{बक उ}}{\text{अक त}}$

(२३२)

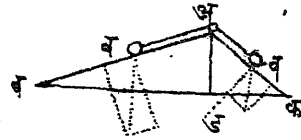
$$\frac{प}{म} = बुध = \frac{बक}{अब} = \frac{उ}{ल}$$
$$\frac{व}{म} = कोबुध = \frac{अक}{अब} = \frac{न}{ल}$$

या प्रमाणे त्रिकोणमितीच्या आधारेणें काढलेल्या सारणीवरून बाकीच्या सारण्या निघतात.

(१४९) दुरी उतरण— वरील विवेचनावरून हें उ-
घट आहे कीं जर एकच उंचीच्या दोन उतरणीवर दोन वजनें एक
मेकांस तौलून धरितील तर ती उतरणीच्या लांब्यांच्या प्रमाणांत
असतील. हें स्पष्टपणें सिद्ध करूं.

या आकृतीत दुरी

उतरण अब डक द्वारव-
ली आहे. यांची उंची अ-
ड सारखी आहे. यांचे उ-
तार सारखे नाहीत. व
पाचेही सारखे नाहीत.
ब, व हीं दोन वजनें एका
दोरीस बांधून ती दोरी उ-
तरणीच्या माथ्यावरील



अ कर्पीवरून सोडिली आहे. व ती वजनें समतोल आहेत. आतां
जेवढ्या प्रेरणेनें व वजन तौलले आहे, तेवढ्याच प्रेरणेनें व वजन
ही तौलले गेले आहे. ती प्रेरणा क्ष आहे असें समजूं. तर
(क. १४९. प्रमाणे.)

$$\frac{क्ष}{व} = \frac{अड}{अब} ; \frac{क्ष}{व} = \frac{अड}{अक}$$

(२३२)

दुसऱ्यास पहिल्यानें भागून.

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{व}} \div \frac{\text{क्ष}}{\text{व}} = \frac{\text{क्ष}}{\text{व}} \times \frac{\text{व}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{अड}}{\text{अक}} \div \frac{\text{अड}}{\text{अब}} = \frac{\text{अड}}{\text{अक}} \times \frac{\text{अब}}{\text{अड}}$$

$$\therefore \frac{\text{व}}{\text{व}} = \frac{\text{अब}}{\text{अक}}$$

(१५०) व्यावहारिक उपचोग- फार जंजीवर मोठी वजन में चढविण्यास उतरणीचा उपयोग होतो. पूर्वी कऱ्या बेऱ्या वगैरे नसत, तेऱ्हां उंच झुमारति बांधतेवेळीं दगड चढविण्यास अशा उतरणीच करीत. मोठ्या हांगरावर चढण्यास सडक करिते वेळीं रसा लहान लहान अशा अनेक उतरणीचा बाकडा तिकडा करितात. आंग्र्याच्या चैलास हांगरावर चढवितांना त्यास समोर नचढवितां एका बाजूवरून दुसऱ्या बाजूस या ममाणें तिकस चढवीत नेतात. येणेंकरून चढवितकऱ्या जास्त उतरणीत बांढला जातो. सर्व मकारच जिणे उतरणी आहेत. त्या उतरणीवर पाय ठेवण्यास चांगले तिकाण असावे म्हणून पायऱ्या करितात. मोठी गळबतें समुद्रांत लोटण्यास व समुद्रांतून जमिनीवर घेण्यास उतरणीच केलेल्या असतात. तसेंच मोठ्या तारवांत किंवा गाड्यांत पिपें वगैरे चढविण्यासही उतरणीचाच उपयोग करतात. मोटेचा वरवंटा हें नेहमींच्या पाहण्यांतलें उतरणीचें उदाहरण होय.

उदाहरणे

(१) एका उतरणीचा चढ १३ फूट लांबीत ५ फूट आहे तर त्या उतरणीवर ११ शेरांचें वजन तोलून घरण्यास उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर अशा दिशेंत किती शेरांच्या शक्तीनें कार्य केले पाहिजे?

(२३४)

उ. ३५ शेर.

(२) उतरणीचा चढ २५ फुटांत २ फूट आहे. तर उतरणीवर १००० पैंडांचें वजन तोलण्यास उतरणीच्या पायाशीं किंवा क्षितिज पातळीशीं समांतर अशा दिशेंत किती शेरांच्या शक्तीचें कार्य झालें पाहिजे?

उ. ८० $\frac{३}{४}$ शेर.

(३) उतरणीच्या लांबीशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करणाऱ्या २ शेरांची शक्ति आणि ३ शेरांची शक्ति या अनुक्रमें उतरणीवर २५२ शेर आणि ६ शेर या वजनांस तेलून धरितात. तर उतरणीचा कल काय असेल?

उ. ४५ आणि ३०

(४) ज्या उतरणीचा चढ ६५ त १६ आहे. त्या उतरणीवर ५०४ पैंडांचें वजन उतरणीच्या पायाशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करणाऱ्या प्रेरणेनें तेलून धरिलें आहे. तर त्याचा उतरणीवर दाब किती पडेल, म्हणजे सपाटीचा प्रतिबंध किती असेल?

उ. ५२० शेर.

(५) ज्या उतरणीवर वजनाच्या निम्मे दाब पडतो म्हणजे उतरणीच्या निम्मे सपाटीचा प्रतिबंध होतो, तर तिचा कल किती असावा?

उ. ६०

(६) एका उतरणीचा कल ३० आहे, आणि उतरणीवरील वजनावर ज्या प्रेरणेचें कार्य होतें, तिची दिशा उतरणीशीं ३० अंशाचा कोन करिते. तर असें सिद्ध करकी, $v = p\sqrt{३}$ असेल?

(७) एका आगगाडीच्या डब्याचें वजन ३० टन आहे व त्यास दोरी लावून बाफेच्या यंत्रानें जिचा चढ ६० त १ फूट आहे, अशा उतरणीवर चढवावयाचें आहे. तर त्या दोरीचा निदा-

न ताण किती पेंढाचा असला पाहिजे? उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत शक्ति कार्य करीत आहे.

उ. ११२० पेंढ.

(८) अन्वक या उतरणीची जेव्हां अन्वलांबी असते व अन्वक पाया असतो, तेव्हां अन्वशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी ३ शेंरांची मेरणा उतरणीवर ५, शेंरांचें वजन तोलून धरिते. तर तीच उतरण अन्वक पाया व अन्वक रेंची अशी ठेविल्यास तिजवर तेव-
तीच शक्ति किती वजनास तोलून धरील?

उ. ३३ शेर.

(९) विवक्षित शक्ति उतरणीच्या पायाशीं समांतर दिशेंत कार्य करीत असतां जेव्हां वजन उतरणीवर तोलून धरूं शकते त्याच्या निम्में वजन तीच शक्ति उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करूं लागल्यास उतरणीवर तोलून धरिते. तर त्या उतरणीचा कल किती असेल.

उ. ६०

(१०) एका उतरणीची लांबी ५ फूट व उंची ३ फूट आहे. तर १०६ शेंरांच्या वजनाचे कसे २ विभाग करावे. म्हणजे १ विभाग उतरणीच्या माथ्यावरून रवालीं लोंबत असतां उतरणीवर ठेविलेल्या दुसऱ्या विभागास तालून धरूं शकिल.

उ. ३१ शेंरांचें वजन रवालीं लोंबत रहावें.

(११) विवक्षित शक्ति क्षितिज पातळीशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करीत असतां किंवा तीच शक्ति उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करीत असतां जास्त वजन तोलून धरील.

उ. उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी शक्ति.

(१२) उतरणीच्या सपाटीवर २० शेंरांचे वजन लाविलेल्या

(२३६)

दोरीचा शेवट सपाटीवरच्या एका बिंदूस अडकविला आहे. दोरी १० शेरांचे वजन मात्र तोलण्याजोगी घट्ट आहे, तर उतरणीचा कल हळू हळू वाढवीत गेल्यास केव्हां दोरी तुटेल.

उ. ३० हून जास्त कल झाल्यावर.

(१३) उतरणीवर विवक्षित वजन तोलून धरण्यास १० शेरांची शक्ति उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करिते; आणि २० शेरांची शक्ति तेंच वजन तोलण्यास क्षितिजपातळीशीं समांतर दिशेंत कार्य करिते; तर उतरणीचा कल काढः

उ. ६०

(१४) एका उतरणीवर उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी १२ शेरांची प्रेरणा २० शेरांच्या वजनास तोलून धरिते. तर असें सिद्ध करकीं तेंच वजन तोलून धरण्यास क्षितिजपातळीशीं समांतर अशा दिशेंत शक्ति लावणें झाल्यास ५ : ५ या प्रमाणानें वाढविली पाहिजे; आणि उतरणीवरील दाब १६ :: २५ या प्रमाणानें वाढेल.

(१५) उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी शक्ति उतरणीवरील दाब, आणि वजन हीं १ : $\sqrt{३}$: २ या प्रमाणांत आहेत तर त्या उतरणीचा कल काय असावा?

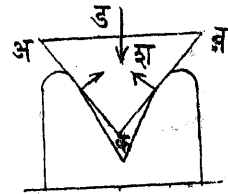
उ. ३०

पाचर

(१५१) पाचरे एकाजवळ एक असे एका पातळीत राहण्याजोग्या दोन उतरणी एकत्र जोडल्या म्हणजे पाचर बनते. उतरण स्वतः सरत नाही, परंतु पाचरास शक्ति लाविली म्हणजे ते पुढे जाते म्हणून यास कधी कधी चळ दुरी उतरण असेही नांव देतात. उतरणीचीं दोन शेवटे समान व सरूप त्रिकोणाकार असतात व बाकी तीन बाजू काटकोनाकार समांतरभुज चौकोनाच्या आकाराच्या असतात.

अबकडेस पाचराची धार असें म्हणतात आणि कड ईफ समांतरभुज चौकोनास पाचराचा माथा असें म्हणतात. पाचराचा मुख्यत्वे उपयोग लांकूड, दगड वगैरे पदार्थ चिरण्यास किंवा सोडविण्यास करतात. कुन्हाडी, सुताराचीं किंकरी, रंधे, तरवारी, व चाकूची पाती इत्यादि पाचराचीच उदाहरणे होत. लांकडांत पूर्वी बारीक चिरपाडून त्यांत पाचर घालतात आणि पाचराच्याडोक्यावर हातोडा अथवा मोगरा याचे घाव मारून त्यास पुढे सरतात. दुसऱ्या यंत्रांमार्फत यावर शक्तीचे एकसारखे कार्य चालत नाही. वास्तविक वेळ्यांच्या आघाताने पाचराचे परिणाम घडतात, म्हणून याचा विचार यंत्रस्थितिशास्त्रांत येत नाही. परंतु साधारणतः पाचराच्या समतोलत्वाचा नियम समजावयाकरितां त्याचे दिग्दर्शन केले आहे.

(१५२) पाचराच्या माथ्याशी ल ब अशा पातळीने केलेले पाचराचे छिन्न अबक त्रिकोण आहे असें समजूं शकता. पाचराच्या माथ्याच्या दु मध्यावर लाविलेली आहे, आणि त्या शक्तीने पाचरलां-



हाहे. दो-
शीचाकू

स १०

त्रयंक

तिजपा-

ळकाडः

३

ांतरदि-

स तोड-

पास कि-

ऱ्यास

वरीलदु-

करणा-

याअ-

(२३८)

कडान शिरत आहे व त्यावेळीं लांकडाचा प्रतिबंध अक आणि बक बाजूवर होईल, तो प आणि फ आहे, असें समजूं हे प्रतिबंध अक, बक बाजूशीं लंब दिशेंत कार्य करतील. आणि श शक्ति ही अबशीं लंब अशा दिशेंतच कार्य करील. यास्तव श, प, फ या तीन मेरणांनीं पाचर समतोल आहे. या तिन्ही मेरणांच्या दिशा अबक त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंवर लंब आहेत. म्हणून या तिन्ही मेरणा त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूशीं समाणांत असतील. (प्रकरण ३ उ. ६, पृ. ६५ पहा.)

∴ शःपःफः : अबः अकः बक.

जर अक = बक असेल तर पाचरास समद्विभुज पाचर असें म्हणतात. आणि अशा वेळीं प आणि फ हे प्रतिबंध समान असतील.

∴ शःपः :: अबः अक.

तसेंच शःपः :: अबः बक.

∴ शः२पः :: अबः अक + बक = २अक.

२प म्हणजे पाचराचा सर्वा प्रतिबंध आहे तो प्र या अक्षरात नें दृशिविल्यास:-

शः प्रः :: अबः २अक.

किंवा $\frac{श}{प्र} = \frac{अब}{२अक}$.

जर समद्विभुज पाचरांत अकब कोन २७ असेल तर अब
— २अक भु ७

∴ $\frac{श}{प्र} = \frac{मु७, आणि}{प} = \frac{श}{प} = \frac{अब}{अक} = \frac{२अक भु ७}{अक} = २ भु ७$.

व्यावहारिक उपयोग- सर्व कापण्याचीं व टोंचण्याचीं ह

३ आणि ब-
हे मतिव-
ठाश शक्ति
फ या ती-
अबक
भैरणा वि-
उ. ६. ५. ६५

चर असे
मान अस-

या अक्षर

तर अब

=२ सु ७.

चिण्याचीह

त्यारे जसे चाकू, सुया, वस्तरे, कातऱ्या, किंकरी, कुन्हाडी वगैरे पा-
चराची उदाहरणे होत. ज्या कामाकरिता उपयोग करून घेणे असे-
ल त्या प्रमाणे पाचराचा कोन लहान किंवा मोठा असतो. लांकूड का-
पण्यास ज्या किंकऱ्यांचा उपयोग करितात त्याचा कोन ३° चा अ-
सतो. लोखंड कापण्याच्या हत्याराचा कोन ५° पासून ६° चा अ-
सतो. पितळ कापण्याकरिता ८° पासून ९° पर्यंत असतो. जीं ह-
त्यारे केवळ दाबाने खुपसावयाचीं असतात, त्यांपेक्षा जीं टोले मारून
न आंत सारावयाचीं असतात तीं कमी तीक्ष्ण असलीं तरी चालता-
त. पदार्थ फार मृदु असला म्हणजे त्यास चिरण्यास हत्यार फार ती-
क्ष्ण लागते. करवत हा अनेक पाचरांचा बनलेला असतो. चाकू
किंवा वस्तरा यांच्या धारीही सूक्ष्मदर्शक यंत्राने पाहिल्यास करव-
ता सारख्या दिसतात. धारेवर बोट फिरविल्यानेही करवता सार-
खा आकार असल्याचे अनुभवास येईल. जे मोठमोठे रकडक इ-
तर रीतींनीं फुटणार नाहीत, त्यांस पाचराने अल्पाद्यासाने चिरतां
घेते. मोठालीं गळवते स्फक्या जमिनीवर असतात, त्यांच्या बुंधा
खालीं पाचरा ठोकिल्यानें तीं सहज उचळितां येतात. उंच दिपमाळा
व इमारति जमिनीच्या ओलेपणामुळे किंवा दुसऱ्या कारणाने एका
बाजूस नोळतात. त्यांच्या त्या बाजूस पाचरा ठोकून त्यांस सरळ क-
रितां घेते.

उदाहरणे.

(१) पाचराची लांबी $१\frac{१}{२}$ फूट आहे. रुंदी $\frac{१}{२}$ फूट आहे. व
त्यावर १०० शेरांच्या जोराने दाविलेंतर किती शेरांचें वजन उचललें
जाईल?

उ: ७५० शेरा.

(२) समद्विभूज काटकोनाकार एक पाचर आहे. त्यावर का-

(२४०)

टकोनाच्या समोरच्या बाजूस ५० शेंरांची घेरणा कार्य करित आहे तर त्याच्या दुसऱ्या दोन बाजू किती शेंरांचा प्रतिबंध करू शकतील?

उ- २५√२ शेंरा.

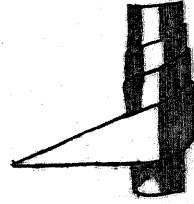
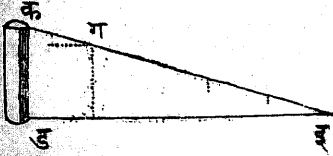
(३) एक पाचर समभुज त्रिकोणाकार आहे. त्याच्या दोन बाजू प्रत्येकीं १० शेंरांचा दाब पाडीत आहेत. तर त्याच्या तिसऱ्या बाजूवर किती शेंरांची घेरणा लावू केली असावी?

उ- १० शेंरा.

प्रकरण १२

मळसूत्र.

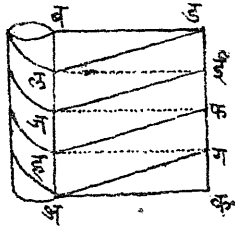
(१५.३) मळसूत्र हें केवळ साधें यंत्र असून कांहीसो मिश्र यंत्र आहे. कारण यास फिरविण्यास दांडा अथवा उच्चालक लागतो. उच्चालकाचा उपयोग केल्यावर पदार्थ दाबण्यास व मोठी वजनें उचलण्यास मीठ्या सामर्थ्याचें हें मिश्र यंत्र होतें. मळसूत्र उतरणीचाच रूपभेद आहे. उतरणीच्या आकाराच्या कडड हा कागदाचा तुकडा कापावा. आणि तिच्या कडड उंची एवढ्या उंचीचा एक गोळ रूळ घ्यावा. उतरणीची कडड बाजू रूळस चिकटवून उतरण रूळ भोंवती गुंडाळावी म्हणजे बाजूस दारविल्या



प्रमाणें उतरणीची कडड धार दांड्यावर सर्पकृति दिसेल. हें सर्पकृति सूत्र मळसूत्राची धार दर्शवितें. क बिंदुखातीं बरोबर कडड चा ग बिंदु येईल. तर क ग मळसूत्राचा एक वेदा होईल. त्याचा दुसरा तिसरा वगैरे वळसे एवढेच होतील. मध्येक वळसा म्हणजे एक केक उतरण असून ती दांड्या सभोंवती गुंडाळून मळसूत्राचा एक केक वेदा बनतो. आणि जेवढे वेदे असतील तेवढ्या सरूप उतरणी गुंडाळून मळसूत्र बनलेलें असतें.

(१५.४) वास्तवीक एकास एक लागलेल्या व सारख्या आ-

काराच्या अनेक उतरणी गोल रूळा भोंवती गुंडाळून मळसूत्र झाले-
ले. अगते. याची चांगली कल्पना घेण्याकरिता एक रूळ घेऊन त्या-
च्या परिघा एवढी ज्याची रुंदी आहे असा रूळाच्या लांबी एवढा



काटकोन चौकोनाकार अक्षरकड काग-
दाचा तुकडा कापावा. नंतर त्याच्या कड
बाजूचे हवे तितके सारखे भाग पाडावे. उ-
दाहरणार्थ तिचे सारखे चार विभाग गुफ,
इ स्थळी केले आहेत नंतर अग सां-
धून अगशीफ, इड या विंदूंतून, समांतर

रेषा काढाव्या किंवा गफडू पासून अक्षरी समांतर रेषा काढून
अग, हफ, जई आणि लडू कर्ण काढावे म्हणजे अकग, ह
गफ, जफई आणि लईड सारख्या आकाराच्या उतरणी हो-
तील. रेषा बाहेरून दिसतील असा हा चौकोनी कागद रूळा-
वर गुंडाळला तर अग, हफ, इत्यादि समांतर रेषांची एकच
सलग संपत्कृति मळसूत्राची धार दिसेल आणि त्याचा एकेकवे-
दां एकेक उतरणीच्या लांबीबरोबर असेल. यांत गअकको-
न म्हणजे उतरणीचा कल हाच मळसूत्राच्या सूत्राचा कल आहे.
याम मळसूत्राचा कोन म्हणतात. उतरणीची उंची कग म्हणजे
सूत्राच्या दोन जवळ जवळच्या वेळ्यांमधील अंतर आहे.

$$\frac{\text{कग}}{\text{अक}} = \text{स्पर्शरे} \cdot \text{गअक} \therefore \text{कग} = \text{अक} \times \text{स्पर्शरे}$$

गअक - अक लांबी रूळाच्या परिघाबरोबर आहे. जर रूळा-
ची भिज्या त आणि व्यास आणि परीघ यांमधील प्रमाणप्र क-
ल्पिले तर अक = २प्रत होईल. कग = २प्रत × स्पर्शरे - ग-
अक होईल. गअक कोन म्हणजे मळसूत्राचा कल ७ अक्षरांचे
इईविला तर, सूत्राच्या दोहों वळ्यांमधील अंतर कग = २प्रत ×

स्वरीरे ७ होईल. अग ही सूत्राच्या एका वेढ्याची लांबी आहे.

$$\frac{\text{अग}}{\text{गक}} = \text{भु७} \therefore \text{अग} = \text{कग} \cdot \text{भु७}. \text{ अग म्हणजे}$$

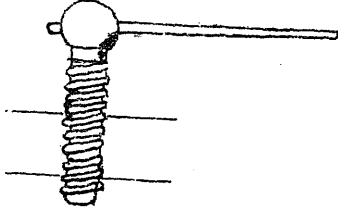
सूत्राच्या एका वेढ्याची लांबी तर आणि कग म्हणजे सूत्रांतर अ
कल्पिल्यास. $\text{भु७} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$.

(१७७) मळसूत्राचें सर्पाकृति सूत्र केवळ रूळाच्या आंगा-
बरोबर त्याच्या सपाटीपासून वर आलेले असले म्हणजे स्वरे मळसू-
त्र बसते. सूत्राची ही कूग काटकोन चौकोनाचा सपाटीशी किंवा
रूळाच्या पृष्ठभागाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी व रूळाच्या आं-
साशी समांतर अशा पातळीशी लंब असते. दोहों सूत्रांमधील अं-
तर रूळाच्या आंसाशी समांतर मानिलें तर तें सर्व ठिकाणी सार-
खें आणि कग बरोबर असते.

मळसूत्र उतरणीचा रूपभेद आहे. म्हणून यांतील यांत्रि-
क स्वार्थाचें ममाण उतरणी ममाणें काढतां येईल. परंतु उतरणीत ज-
से वजन उतरणीच्या सपाटीवर ठेवितात आणि सपाटीचा प्रतिबंध
त्या वजनास होतो. त्या ममाणें मळसूत्रांत वजन त्याच्या सूत्रावर ठे-
वीत नाहीत. वजन मळसूत्राच्या दांड्याच्या माथ्यावर ठेवितात आ-
णितें रवाली जाण्यास प्रतिबंध दुसऱ्या एका मळसूत्राच्या योगा-
नें लागू करितात. मळसूत्र एका पोकळ चाकीतून फिरते. चा-
की आंतून पोकळ व वाढेळी असते. आणि तिच्या आंतील बा-
जूस सर्पाकृति रवोत्तगत रवांच अशी असते कीं, रवांचें मुख्य म-
ळसूत्राचे सूत्र बरोबर बसते. याच्या योगानें प्रतिबंध लागू हां-
ण्यास मळसूत्र किंवा चाकी यांपैकीं एक अचल असावें ला-
गते. जेव्हां चाकी अचल असते तेव्हां मळसूत्राच्या एका टोंकास
उच्चालक लावून त्यानें मळसूत्र फिरवावें लागते व तेणें कसून तें
एका टोंकापासून दुसऱ्या टोंकापर्यंत जाते.

ले-
त्या-
इवता
काग-
रुड
वे. रु-
गुफ,
सां-
मांतर
दून
ग, ह
ी हो-
रूळा-
कच
कवे-
को-
आहे,
इणजे
रीरे.
रूळा-
न क-
लग-
क्षरते
प्रतः

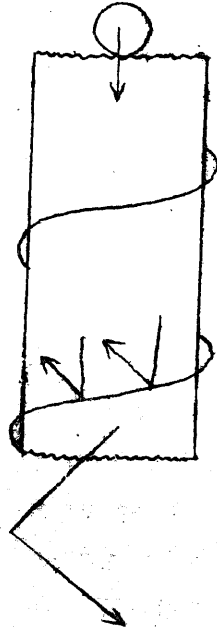
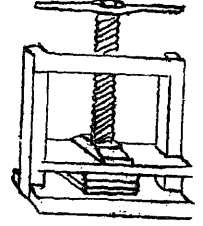
(२४४)



जेव्हां मळसूत्र अचल असतें, परंतु त्याच्या आंसाच्या रेषेत रवालवर जाऊं शकते, तेव्हां चाकीस उच्चालक लावून चाकीस त्यानें फिरविलें म्हणजे मळसूत्र रवालवर एका टोंकापासून दुसऱ्या टोंकापर्यंत नेतां येतें आ-

णि येणेंकरून दाब पाडितां येतो, किंवा वजन उचलतां येतें.

(१५६) समजा कीं व वजन मळसूत्रावर ठेविलें आहे तें आपल्या वजनानें रवालीं उतरण्यास यत्न करील. त्यास उतरण्यास चाकीचा कांहीं प्रतिबंध होईल. त्यास वर चढविण्यास किंवा रवा-



लीं अगदीं न उतरूं देतां तोलू

न धरण्यास मळसूत्राच्या बुडापाशीं प्रेरणा लावाची लागेल. ती प्रेरणा मळसूत्राच्या आंसाशीं लंब अशा उच्चालकानें कांहीं शक्ति लावून उच्चालक फिरविला म्हणजे चाकीं वून मळसूत्र वर जाईल आणि वजन उचलेल. किंवा त्या प्रेरणेनें वजनास तोलून धरितां येईल. प्रेरणा लावून उच्चालक फिरवित्यानें वजन ज्या दिशेनें रवालीं येत होते तें त्याच्या उलट दिशेनें रूळ वर जाईल. म्हणजे प्रेरणेची कार्यदर्शक दिशा वजनाच्या उलट असेल. उच्चालकास एक फेरा दिला म्हणजे मळसूत्रास एक फेरा मिळेल. आणि दोहों

(२४५)

सूत्रांमध्ये अंतर असेल. तितकें वजन वर उचलेल. म्हणून मळसूत्रापासून जो फायदा होतो त्याची गणना करितांना दोन गोष्टींचा विचार केला पाहिजे. (१) ज्या दांड्यावर किंवा रुळावर मळसूत्र आहे त्याचा परिघ आणि (२) त्यामळसूत्राच्या सूत्रामधील अंतर. मळसूत्राच्या एका फेंच्यापासून दुसऱ्या फेंच्यापर्यंत वजन चढण्यास मळसूत्राचा दांडा एकवेळ फिरला पाहिजे, हें उघड आहे. यास्तव मळसूत्राच्या परिघास जसें सूत्रांमधील अंतर तसें शक्तिस वजन होईल. परंतु मळसूत्राचा परिघ लहान असतो याकरितां नुस्तें मळसूत्र फिरवूं लागल्यास फार जोर लागतो व असा मळसूत्राचा उपयोग ही करित नाहीत. मळसूत्र फिरविण्यास मळसूत्राच्या आंसाशी लंब अशा दिशेंत एक आडवा दांडा उच्चालकाप्रमाणें लावूनच मळसूत्र फिरवितात, आणि जशी उच्चालकाची अधिकाधिक लांबी असेल त्याप्रमाणें थोड्या शक्तीनें मळसूत्र फिरतें व जास्त फायदा होतो. या उच्चालकाच्या बाहेरील टोकानें जो परिघ होतो त्यासच मळसूत्राचा परिघही म्हणतात. हा परिघ सूत्रांतरापेक्षां जितका मोठा असेल तितका यांत्रिक स्वार्थ वाढेल. यावरून हें उघड झाले कीं, मळसूत्र फिरविण्याचा दांडा जितका लांब असेल आणि मळसूत्राची सूत्रे जितकीं अति जवळ असतील तितकी त्या मळसूत्राची शक्ति अधिक होईल. म्हणून या सूत्राचें सामर्थ्य वाढविण्यास ज्या उच्चालकानें शक्ति लागू होत्ये त्याची लांबी वाढवावी अथवा सूत्रांमधील अंतर कमी करावें. जर एका मळसूत्राच्या सूत्रांमधील अंतर १ इंच आणि दुसऱ्याच्या सूत्रांमधील अंतर ३ इंच असेल. तर उतरणीच्या मूळकारणाचा विचार केल्यानें असें दिसेल कीं ज्या मळसूत्राचें अंतर ३ इंच आहे त्यापेक्षां ज्याच्या सूत्राचें अंतर १ इंच आहे त्यापासून तिप्पट फायदा होईल. या टिकाणीं ए-

(२४६)

वठें लक्षांत ठेवावें कीं, ३ इंच सूत्रांतराच्या मळसूत्रास जितक्या वेळां फिरावें लागेल. त्याच्या तिप्पटवेळा १ इंच सूत्रांतराच्या मळसूत्रास त्याच स्थळांतून फिरावें लागेल. म्हणजे ज्या स्थळांतून गमन घडते अथवा जो काळाचा तोटा होतो तो नफ्याशीं प्रमाणांत असतो. सारांश मळसूत्रांत शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण सूत्रांतर आणि उच्चालकाच्या फिरण्यानें जें वर्तुळ होतें त्याचा परिघ यांमधील प्रमाणाबरोबर असतें. म्हणजे शक्तिसजसें वजन तसेंच सूत्रांतरास उच्चालकाच्या फिरण्यानें झालेल्या वर्तुळाचा परिघ सूत्रांतर दशविण्यास अ आणि परिघ दशविण्यास प अशीं अक्षरें घेतलीं तर मळसूत्राची सर्व साधारण सारणी अशी होईल.

$$\frac{श}{व} = \frac{अ}{प} \quad \text{किंवा} \quad श \times प = व \times अ.$$

यां पैकीं कोणतीही तीन मळक असलीं म्हणजे चवथें काढतां येतें. बहुतेक रून उच्चालकाची लांबी दिलेली असते म्हणजे जो परिघ आम्हांस पाहिजे त्याची त्रिज्या उच्चालकाची लांबी असते. या लांबीस २५ नें म्हणजे $\frac{५५}{२५}$ नें गुणिलें म्हणजे परिघ समजतो.

(१७७) आतां उतरणीच्या मूलतत्वावरून गणितरीत्या ही सारणी काढूं.

उतरणीवर वजन एका बिंदुस्थळीं असे व त्या स्थळीं त्यास समझील ठेवण्यास कोणत्या प्रेरणांची कार्यें त्यावर होत होतीं एवढ्याच विचार करावा लागला. मळसूत्रांत वजन सूत्राच्या सर्व बिंदूवर पसरलेलें असतें आणि त्या बिंदूवर चाकीच्या रवांचे पासून प्रतिबंध होतो. तसेंच आंसाशीं लंब अशा उच्चालकानें जी प्रेरणा मळसूत्राच्या रूढास लावितों तिचें कार्य प्रत्येक बिंदू-

(२४७)

वर जें वजन पसरलेलें असतें त्यावर होतें व तेंही आंसाशीं लंब अशा दिशेंत होतें. सारांश मत्येक बिंदूवर जें वजन घेतें त्यावर तीन प्रेरणांचीं कार्यें होतात. मळसूत्र समतोल राहण्यास प्रेरणा व वजन या मधील प्रमाण काढण्यास मळसूत्राच्या एका फेऱ्याच्या सर्व बिंदूविषयीं विचार केला पाहिजे. एक फेरा जर उलगाडला तर एक उतरण होईल. मळसूत्रास एक फेरा मिळाला म्हणजे दोहों सूत्रांमधील अंतराइतक्या अवकाशांतून वजन चलन पावतें म्हणून सूत्राच्या मत्येक बिंदूवरील प्रेरणांचा विचार करणें होय.

समजा कीं, व वजन मळसूत्रावर ठेविलें आहे. त्याचें कार्य रवालच्या बाजूच्या पृथ्वीच्या मध्याकडे होईल. हें वजन सूत्राच्या एका फेऱ्याच्या सर्व बिंदूवर पसरून राहील. सर्वांची बेरीज व वरोबर असेल. निरनिराळ्या बिंदूवरील वजन व_१, व_२, व_३, व_४ व_n कल्पिलीं, तर व = व_१ + व_२ + व_३ + व_४ व_n असेल. प्रेरणा आंसाशीं लंब अशा दिशेंत कार्य करितील. म्हणून ती दिशा आंसाशीं सूत्र जेवढा कोन करील तेवढाच कोन करील किंवा सूत्र पायाशीं जेवढा कोन करील तेवढाच कोन प्रेरणेची दिशा करील. या प्रेरणेचें मत्येक बिंदूवर जें कार्य होईल, त्याची दिशा इच्या दिशेशीं समांतर असेल. म्हणजे ज्या प्रेरणेच्या अशाचें मत्येक बिंदूवर कार्य घडेल, त्या मत्येक प्रेरणेची दिशा ही पायाशीं तेवढाच कोन करील.

प_१, प_२, प_३ प_n इत्यादि प्रेरणा मत्येक बिंदूवर कार्य करतात. चाकीचा एकंदर प्रतिबंध आहे व मत्येक बिंदूवर र_१, र_२, र_३ र_n इत्यादि प्रतिबंध आहेत. उतरणीचा कल θ आहे. अशा उतरणीत मत्येक प्रेरणा पायाशीं समांतर अशी कार्य करिते.

(२५६)

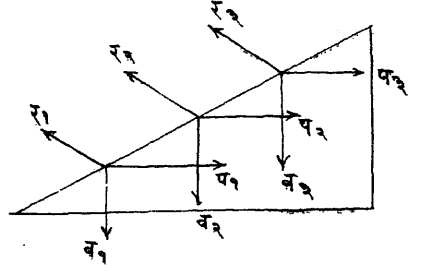
सूच्य क. १४६. समागं.

$$\frac{प_१}{व_१} = \text{स्पर्शरे. } \theta$$

$$\frac{प_२}{व_२} = \text{स्पर्शरे. } \theta$$

$$\frac{प_३}{व_३} = \text{स्पर्शरे. } \theta.$$

$$\frac{प_n}{व_n} = \text{स्पर्शरे. } \theta.$$



$$\frac{प_१ + प_२ + प_३ + \dots + प_n}{व_१ + व_२ + व_३ + \dots + व_n} = \text{स्पर्शरे. } \theta \text{-(अ.)}$$

$$व_१ + व_२ + व_३ + \dots + व_n = व \text{----- (ब)}$$

इशक्ति आणि प_१, प_२, प_३, इत्यादि भेरणा यांची कार्ये समान आहेत किंवा इशक्ति भेरणा प_१, प_२, प_३ इत्यादि भेरणांशी समतोल आहे. सूच्य त्यांचीं आमकले बरोबर असलीं पाहिजेत. प_१, प_२, प_३ इत्यादि भेरणा मळसूत्राच्या रुळाच्या पृष्ठभागाचे कार्य करितात. सूच्य आसापासून त्यांच्या कार्येदृशिक रेषावर लंब मळसूत्राच्या रुळाच्या विज्येबरोबर होतील, ती विज्या त आहे असें कळूं आणि इशक्ति ज्या उचालकामें कार्य करिते त्याची लांबी लंब समजली तर:-

$$\text{इशक्ति} = त (प_१ + प_२ + प_३ \dots \dots + प_n)$$

$$\therefore प_१ + प_२ + प_३ + प_४ \dots + प_n = \frac{\text{इशक्ति}}{त} \dots \text{(क)}$$

(ब) आणि (क) यांचील यांतील किमती (अ) यांत लि-

हून-

इशक्ति

$$\frac{त}{व} = \text{स्पर्शरे. } \theta; \quad \frac{\text{इशक्ति}}{त \cdot व} = \text{स्पर्शरे. } \theta.$$

(२४९)

$$\frac{\text{श. त. स्पर्शरे. थ}}{\text{व ल}} \times \frac{\text{रप्र}}{\text{रप्र}} = \frac{\text{रप्रत स्पर्शरे. थ}}{\text{रप्रल.}}$$

२ मत. स्प. थ = कग. दोहों सूत्रांमधील अंतर (क पहा.)

२ प्रल = श शक्तीने ल लांबीच्या उच्चालकाने काढलेल्या वर्तुळाचा परीघ.

$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{सूत्रांतर.}}{\text{लत्रिज्येच्या वर्तुळाचा परीघ}} = \frac{\text{अ}}{\text{प}} \dots (१)$$

तसेच क. १४८ यमाणे.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p_1}{r_1} = \text{सु. थ.} \\ \frac{p_2}{r_2} = \text{सु. थ.} \\ \frac{p_3}{r_3} = \text{सु. थ.} \\ \frac{p_n}{r_n} = \text{सु. थ.} \end{array} \right\} \dots \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}{r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n} = \text{सु. थ.} \dots (ड)$$

$$\frac{p_2}{r_2} = \text{सु. थ.} \dots r_1 + r_2 + r_3 \dots r_n = r \dots (इ)$$

$$\frac{p_3}{r_3} = \text{सु. थ.} \dots \text{शल} = \text{त} (p_1 + p_2 + p_3 \dots + p_n)$$

$$\frac{p_n}{r_n} = \text{सु. थ.} \dots \therefore p_1 + p_2 + p_3 \dots + p_n = \frac{\text{शल}}{\text{त}} \dots (फ)$$

(इ) आणि (फ) यांतील किंमती (ड) यांत लिहून.

$$\frac{\text{शल}}{\text{र}} = \text{सु. थ.} \dots \frac{\text{शल}}{\text{तर}} = \text{सु. थ.}$$

$$\frac{\text{श}}{\text{र}} = \frac{\text{तसु. थ.}}{\text{ल.}}$$

$$\text{क. यमाणे — सु. थ.} = \frac{\text{अ}}{\text{ल}}$$

$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{र}} = \frac{\text{त} \times \frac{\text{अ}}{\text{ल}}}{\text{ल}} = \frac{\text{अत}}{\text{लल}} \dots \dots \dots (२)$$

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{अ}}{\text{प}}$$

याने वरच्यास भागून.

(२५०)

$$\frac{व}{र} = \frac{पञ्चत}{अल्ल} = \frac{पत}{ल्ल} \quad प = २ मल.$$

$$\frac{व \quad २ मलत}{र \quad ल्ल} = \frac{२ मत}{ल} = \frac{मळसूत्राचा परीघ.}{मळसूत्राच्या एका वेढ्याची लांबी} \quad (३)$$

(२) हीच सारणी त्रिकोणमितीचा उपयोग केल्याशिवाय ही काढिता येते.

व, इ, र, ल, अक्षरे पूर्वीप्रमाणे वजन, शक्ति, प्रतिबंध आणि उच्चारकाची लांबी दर्शविण्यास घेऊं. शिवाय आणखी मळसूत्राची त्रिज्या दर्शविण्यास त, मळसूत्राचा परिघ दर्शविण्यास प, उच्चारकाच्या फिरण्याने केलेल्या वर्तुळाचा परिघ दर्शविण्यास प, सूत्राच्या एका वेढ्याची लांबी दर्शविण्यास ल आणि सूत्रांतर दर्शविण्यास अ आणि वजनास तोलून घरण्यास सूत्राच्या पृष्ठभागावर पाया-शी समांतर दिशेत कार्य करणारी घेरणा इ घेऊं.

आतां सूत्राचा एक वेढा उगडल्यास जी उत्तरण होईल तिजवर व वजनास इ घेरणा तोलून घरीत आहे म्हणून. क- १४६, प्रमाणे.

$$\frac{इ}{व} = \frac{उंची}{पाया}$$

येथें उत्तरीची उंची म्हणजे सूत्रांतर, आणि उत्तरीचा पाया म्हणजे मळसूत्राचा परीघ आहेत. ∴

$$\frac{इ}{व} = \frac{अ}{प} \dots \dots \dots (अ)$$

परंतु इ घेरणा आणि इ घेरणा परस्पर समतोल आहेत. म्हणून त्यांची मळसूत्राच्या आंसा भोंवतालची आमकले समान असली पाहिजेत. आंसापाळून इ आणि इ या घेरणांच्या कार्यद-ईक रेखांबरील लंब त आणि लूच होतील.

(२५१)

∴ शत = शल ; श = $\frac{\text{शल}}{\text{त}}$
ही किंमत (अ) यांत लिहून.

$$\frac{\text{शल}}{\text{त}} = \frac{\text{अ}}{\text{प}}$$

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{अ}}{\frac{\text{ल}}{\text{त}} \times \text{प}}$$

प हा त त्रिज्येच्या वर्तुळाचा परिघ आहे. त्रिज्या आणि परिघ यां मधील प्रमाण $\frac{५९}{१८}$ हे २ प्रमं दर्शवितात. म्हणून प = अत

$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{अ}}{\frac{\text{ल}}{\text{त}} \times २\text{अत}} = \frac{\text{अ}}{२\text{शल}} = \frac{\text{अ}}{\text{प}} \dots \dots (१)$$

तसेच क. १४६ प्रमाणे.

$$\frac{\text{श}}{\text{र}} = \frac{\text{उंची}}{\text{लांबी}}$$

उंची म्हणजे सूत्रांतर ७५ आणि उतरणीची लांबी म्हणजे मळ सूत्राच्या एका वेळ्याची लांबी ल आहेत.

$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{र}} = \frac{\text{अ}}{\text{ल}} \text{ परंतु } \frac{\text{श}}{\text{र}} = \frac{\text{शल}}{\text{त}}$$

$$\frac{\text{शल}}{\text{र}} = \frac{\text{अ}}{\text{ल}}$$

$$\frac{\text{शल}}{\text{रत}} = \frac{\text{अ}}{\text{ल}}$$

$$\frac{\text{श}}{\text{र}} = \frac{\text{अत}}{\text{लल}} \dots \dots \dots (२)$$

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{अ}}{\text{प}} \text{ याने वरच्यास भागून.}$$

$$\frac{\text{व}}{\text{र}} = \frac{\text{अपत}}{\text{अलल}} = \frac{\text{पत}}{\text{लल}}$$

(२५२)

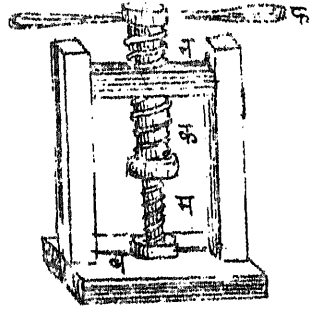
प = २मल; आणि २मत = प

$$\therefore \frac{व}{र} = \frac{त \times २मल}{ल \times ल} = \frac{२मत}{ल} = \frac{प}{ल}$$

(१५८) संयुक्त मळसूत्र— मळसूत्र फिरविण्यास लाविलेल्या उच्चालकाची लांबी हवी तितकी वाढवून किंवा सूत्रांतर हवे तितकें कमी करून मळसूत्राचें सामर्थ्य हवें तितकें वाढवितां येईल, असें वरील विवेचनावरून सिद्ध आहे. यादोन रीतिनीं यंत्रिकसामर्थ्य वाढविण्यास जरी शास्त्ररीत्या मर्यादा नाही तरी व्यवहारांत उच्चालकाची लांबी फार वाढविल्यानें व सूत्रांतर कमी केल्यानें फार अडचणी येतात कारण उच्चालकाची लांबी वाढविल्यानें त्याचें टोंक फिरण्यास जें स्थळ पाहिजे तें मोठें लागतें व यंत्रास अवजडपणा येतो. सूत्रांतर फार कमी करण्यास सूत्रही फार बारीक धरावें लागेल, व तेणें करून त्याच्या आंगीं डबिलें वजन धरण्याचें सामर्थ्य राहणार नाही. या दोन्ही अडचणी नयेतां मळसूत्राची शक्ति वाढावी या हेतूनें संयुक्त चाक व कणा या यंत्राप्रमाणें दोन मळसूत्राचें एक संयुक्तमळसूत्र हंटर यानें शोधून काढिलें आहे. यांत दोन मळसूत्रे असतात. लहान मळसूत्र थोरल्याच्या आंत फिरते. थोर मळसूत्र चाकीमधून उच्चालकानेंच फिरते; परंतु तें कशावर दावीत नसून त्याचें कार्य धाकट्या मळसूत्रावर होतें. थोरल्या मळसूत्राचा दांडा पोकळ असून त्या पोकळींत धाकट्या मळसूत्राचीं सूत्रे बरोबर बसण्या जोग्या रवांचा पाडलेल्या असतात. थोरल्या मळसूत्राच्या सूत्रांतरापेक्षा धाकट्याचें सूत्रांतर कमी असतें. धाकटें वा दोळें फिरत नसून तें एका फळीस पळे बसविलेले असतें. यामुळे तें फक्त वर रवालीं सरतें व तेणें करून त्याणें जास्तकमी दाब पाडितां येतां. थोरलें मळसूत्र त्याच्या सूत्रांतरा इतकें रवालीं येतें व धाकटें त्याच्या सूत्रांतरा इतकें वर चढतें. आणि दोहोंच्या अंतरा इतक्या अवकाशांतून लहान मळसूत्र रवालीं उतरून दाब उत्पन्न होतो. या प्रमाणें फार

बारीक सूत्राच्या मळसूत्रा इतका दाब पाडिता येतो. रवाळील आकृती वरून वरील गोष्टी चांगल्या लक्षांत येतील.

क हे मोंतें मळसूत्र न या स्थिर चाकींत फिरत आहे. आचा दांडा पोकळ असून दुसऱ्या लढान मळसूत्रास चाकी घाणें उपयोगी पडतो. पाकळीतील सूत्रें म मळसूत्राच्या सूत्राशीं मिळतीं असतात. भार घालण्याची ब फळी रवाळीं वर होत्ये. व तीस हे धाकटें मळसूत्र घडू ब-



सविलेले आहे. क मळसूत्र फ या उच्चालकानें फिरवितां येतें. एका फेऱ्यानें क पोकळ मळसूत्र आपल्या जवळ जवळच्या दोन सूत्रां मधील अंतरा इतक्या स्थळांतून रवाळीं जातें व त्या बरोबर दुसरें धाकटें म भरीव मळसूत्र आपल्या सूत्रांतरा इतक्या स्थळांतून वर चढतें. या मुळें ब फळी व तीस लाविलेले म मळसूत्र ही दोन्ही दोहीं मळसूत्राच्या सूत्रांतरा इतक्या स्थळांतून रवाळीं जातात. ही परिणाम उभयतांच्या एकत्र व्यापारापासून घडतो. जर म मळसूत्र नसून एक साधा दांडा कच्या पोकळींत बसविलेला असला तर क मळसूत्र रवाळीं येतांच तितका तो दांडाही रवाळीं आला असता व या सूत्रांतराच्या मानानेंच कायतो फायदा झाला असता. दोघांचीं सूत्रें सारखीं असतील तर एक रवाळीं येईल तितकें दुसरें वर चढेल, आणि ब फळी आपल्या ठिकाणींच राहिल. परंतु जर मोठ्या क मळसूत्राच्या सूत्रांतील अंतरापेक्षा धाकट्या म मळसूत्राच्या सूत्रांमधील अंतर कमी असेल, तर क आणि म यांच्या सूत्रांतरांच्या अंतरा इतक्या स्थळांतून फ उच्चालकाच्या एका फेऱ्यानें ब फळी रवाळीं जाईल. यावरून ज्या साध्या मळ-

सूत्राचें सूत्रांतर या दोन मळसूत्रांच्या सूत्रांतराच्या वजाबाकी बरोबर आहे, त्या मळसूत्राच्या फळाबरोबर या जोड मळसूत्राचें फळ होते. म्हणून दोन मळसूत्रांच्या सूत्रांतरांची वजाबाकी कमी केल्यानें यांत्रिकस्वार्थ वाढेल. म्हणजे दोन मळसूत्रांच्या सूत्रांतील अंतराच्या वजाबाकीस जसा फ स्थळींचा फिरण्याचा परीघ, तसें शक्तीस वजन, असें प्रमाण असेल. जर उच्चालकाची लांबी ल आणि यांच्या फिरण्यानें झालेल्या वर्तुळाचा परीघ प कल्पिलें, आणि दोहोंचीं सूत्रांतरे अ आणि क्ष कल्पिलीं तर संयुक्त मळसूत्राच्या समतोलत्वाची सारणी अशी होईल.

श	अ-अ	अ-अ
व	२मल	प.

(१५९) हीच सारणी गणितरीत्याही काढितां येते.

फ उच्चालकाच्या टोंकाशीं झ शक्ति लाविली आहे. व तिणें व वजन किंवा प्रतिबंध सहन केला आहे.

झ शक्तीनें दोन्हीं मळसूत्रें फिरत आहेत, परंतु तीं परस्पर उलट दिशेनें फिरताहेत. झ शक्तीचे दोन अवयव जे दोहों मळसूत्रांच्या पृष्ठभागावर म्हणजे परिघांवर कार्य करीत आहेत ते क्ष आणि य आहेत, असें समजूं आतां जर फ उच्चालकाची लांबी ल असेल आणि दोहों मळसूत्रांच्या त्रिज्या अनुक्रमें त व त अ सतील, तर आंसापासून श, क्ष, य या घेरणांच्या दिशांवर काढलेले लंब तेच ल, त, त होतील, झ ही क्ष व य यांची परिणामी घेरणा आहे. क्ष व य यांची मळसूत्रांच्या आंसा भोंवता लचीं भ्रामकत्वे परस्पर विरुद्ध असतील ∴ (क. ६३ प्रमाणें)

शल = क्षत - यत (१)

व वजन थोरल्या मळसूत्रावर कार्य करणाऱ्या शक्तीच्या क्ष या अवयवानें तेलून धरिलें आहे. जर या मळसूत्राचें सू-

(२५५)

आंतर अ असेल आणि त्रिज्या व परिघ यांमधील ममाण २म
कल्पिले तर (क. १५७ ममाणे.)

$$\frac{\text{वअ}}{\text{२मन.}} \dots \dots \dots (२)$$

तसेच व वजन नुसत्या मळसूत्रावरील शक्तीच्या अचयवाने-
ही तोलून धरिले आहे. जर याचे सूत्रांतर अ असेल तर

$$\frac{\text{वअ}}{\text{२मन.}} \dots \dots \dots (३)$$

(२) व (३) या ममी करणांतील किमती (१) यांत लिहून-

$$\frac{\text{शल}}{\text{२मन.}} \text{त} \frac{\text{वअ}}{\text{२मन.}} \text{ने} = \frac{\text{वअ}}{\text{२म}} \frac{\text{वअ}}{\text{२म.}}$$

$$\therefore \text{शल} = \frac{\text{व (अ - अ)}}{\text{२म}}$$

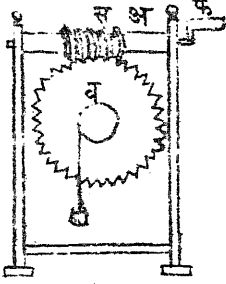
$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{अ - अ}}{\text{२मन.}} = \frac{\text{अ - अ}}{\text{प}}$$

म्हणजे शक्ति आणि वजन यातील ममाण दोहोंच्या सूत्रांतरां
ची बजाबाकी आणि उच्चालकाच्या फिरण्याने झालेल्या वर्तुळाचा प-
रिघ यांच्या ममाणाबरोबर असते.

(१६०) अनंत मळसूत्र - चाकीस पुढे मागे लोढण्या क-
रितां मळसूत्राची योजना नसून कधी कधी त्याची योजना चाकाच्या
दोत्यांवर केलेली असते, व तेणे करून त्याचा व्यापार चाकावर अस-
त दि काळपर्यंत चालतो. म्हणून या मळसूत्रास अनंत मळसूत्र म्ह-
णवत. यांत मळसूत्र व दात्यांचे चाक या दोन मूळ यंत्रांचा संयोज-
न असतो. याचे दिग्दर्शन मागे चाकाच्या मकरणांत ही केले
आहे.

(२५६)

आडव्याअ दात्यावरस मळसूत्र आहे, व ते व चाकाच्या



दात्यांत लावून केले आहे. फ हा त्यास फिरविण्याचा दांडा आहे, त्यास शक्ति लाविता येते. मळसूत्राच्या सूत्रांमधील अंतर चाकावरील कोणत्याही दोन दात्यांमधील अंतरा बरोबर असते व मळसूत्राचे सूत्र दात्यांच्या रवाच्यांत बरोबर बसते. या पुढे मळसूत्रास एक फेरा दिला म्हणजे चाक दोन दात्यांमधील अंतरा इत-

क्या स्थळांतून पुढे जाते. चाकावर २५ दात्ये असल्यास साऱ्या चाकास १ फेरा देण्यास मळसूत्र २५ वेळ फिरवावे लागेल. चाकाच्या कण्यावर वजन लाविलेले असते किंवा त्यानें दुसरे चाक फिरते. या यंत्राने यांत्रिकस्वार्थ कसा होतो ते रवालीं दाखविलेले आहे.

(१६१) या यंत्रातील यांत्रिकस्वार्थ गणितरीत्या असा काढिता येतो.

फ उच्चालकाची लांबी ल आहे व त्यास श शक्ति लाविली आहे. अ हे मळसूत्राच्या सूत्रांमधील अंतर आहे. या मळसूत्राने चाकाच्या दात्यांवर जो दाव उत्पन्न होतो तो द आहे असे घेऊं. या द दाबाने चाकाच्या कण्यावरील व वजन तालूम धरिलेले आहे. चाक व कणा यांच्या विज्या अनुक्रमेंत व त आहेत असे कल्पू-
तर

(क- १२१ प्रमाणे)	$\frac{श}{द}$	=	$\frac{अ}{२मल}$
(क- १२१ प्रमाणे)	$\frac{द}{व}$	=	$\frac{त}{त}$

या दोहों समीकरणाचा गुणाकार करून.

(२५७)

$$\frac{श}{द} \times \frac{द}{व} = \frac{श}{व} = \frac{अ \times त}{२मल \times त}$$

या वरून शक्ति व वजन यांमधील प्रमाण सूत्रांतर आणि कण्याची त्रिज्या यांचा गुणाकार आणि उच्चालकाच्या फिरण्याने झालेल्या वर्तुळाचा परीघ आणि चाकाची त्रिज्या यांचा गुणाकार यांच्या प्रमाणाबरोबर असते. म्हणजे सूत्रांतर आणि कणा ही दोन्ही लहान करून किंवा उच्चालकाची लांबी व चाकाची त्रिज्या ही दोन्ही मोठी करून यांत्रिकस्वार्थ वाढविता येईल.

चाकावरील दात्यांची संख्या न असें केल्या, चाकाच्या दात्यांमधील अंतर मळसूत्राच्या सूत्रामधील अंतरा इतकेच असते. सूत्रांतर अ घेतले आहे. या अंतरास दात्यांच्या न संख्येने गुणिले म्हणजे चाकाच्या परिघाची लांबी निघेल आणि चाकाची त्रिज्या त आहे. तीस २म याने गुणिले म्हणजे ही चाकाचा परीघ निघतो.

$$\therefore नअ = २मत. \quad \therefore अ = \frac{२मत.}{न}$$

ही अची किंमत वरच्या सारणीत लिहून.

$$\frac{श}{व} = \frac{२मत. \times त}{२मल \times त} = \frac{२मत. त. त}{२मल. त. न}$$

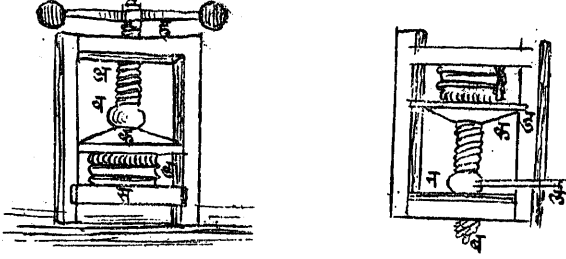
$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{त}{मल.}$$

म्हणजे शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण कण्याची त्रिज्या आणि दात्यांची संख्या व उच्चालकाची लांबी यांचा गुणाकार यांच्या प्रमाणाबरोबर असते.

(१६२) मळसूत्राचे व्यावहारिक उपयोग-
मळसूत्राचे व्यवहारांत अगणित उपयोग होतात. हवामितका

(२५८)

भार उत्पन्न करून त्याची क्रिया साररवी चालावी व तो भारत-
साच राहावा याविषयीं तर मळसूत्राशिवाय दुसरें साधन ना-
हीं. मळसूत्राची स्थिर चापणी रवालील आकृतींत दाखविली



आहे. या चापणीनें बुके बांधणारे बुके दाबतात. एका भक्क-
म चौकटीच्या रवालच्या बाजूस रन फळी बसविलेली आहे. ति-
च्या वरच्या आडव्या ह् लोंकडांत मळसूत्राची चाकी आहे. म-
ळसूत्राच्या तळास क फळी पक्की बसविलेली आहे. स फळी-
वर बुके ठेवून उच्चालकानें मळसूत्र फिरविलें म्हणजे क फळी रवा-
ली घेऊन भार पडतो व बुके दाबलीं जातात. उच्चालकास उलटें
फिरविलें म्हणजे क फळी वर जाऊन भार नाहीसा होतो. यां-
त ह लोंकूड स्थिर असल्यानें मळसूत्राची चाकी स्थिर आहे.
व मळसूत्र रवालवर होते.

दुसरें दाबण्याचें यंत्र वर दाखविलें आहे त्यांत म-
ळसूत्र वाटोळें फिरत नसून फक्त रवालवर जातें. व त्या म्माणें त्या-
स वरच्या आंगस लाविलेली हु फळी रवालवर होऊन दाब प-
डतो आणि न चाकी ल उच्चालकानें वाटोळी मात्र फिरत्ये प-
रंतु तिचें स्थळंतर होत नाही. असल्या यंत्रानें कापसाचे, काप-
डाचे वगैरे गट्टे दाबतात. अर्क, रस, व तेले काढतात. धातूच्या
पत्र्यावर छाप उठवितात. सर्वा छापण्याच्या कामांत मळसूत्राचा उ-
पयोग करतात. उसाचा रस काढण्याचा मळसूत्राचा चरक अ-

(२५९)

सतो. दोन तुकडे नेहमी जोडण्यास मळसूत्राचा उपयोग करितात. गोप, तोडे, बांकी, भांरवच्या बुगड्या वगैरे दागिन्यांचीं देां कें मळसूत्राचीच जोडतात. कागदाच्या प्रति काढण्यास व कागदावर व पाकिटावर टशाचे काप उठविण्यास मळसूत्रच घेतात. सुताराचें भोकें पाडण्याचें गिरमित मळसूत्राचेंच उदाहरण आहे. मळसूत्रानें फार लहान अंतरें मापितां येतात व त्या अंतराचे आणखीही विभाग करितां येतात. मळसूत्रानें एकाइचाचे ५,००० किंवा जास्त भाग होतात. अशा मळसूत्रास सूक्ष्म मापक मळसूत्र (मायक्रामिटर स्क्रू) म्हणतात व याचा उपयोग जोतिषी, गणिती, इंजिनिअर यांस फार होतो. सृष्टिशास्त्रातील जेवढीं म्हणून यंत्रें आहेत त्या सर्वांत मळसूत्राचा फार उपयोग केलेला असतो. बुचें काढण्याचें मळसूत्र हें केवळ मळसूत्राचें सूत्र आहे. सूत्र ज्या दाड्या भोंवती गुंडाळिलें असतें तो दाडा घात नसतो आणि प्रतिबंध दूर करावा याकरितां याचा उपयोग करित नाहीत. याणें मऊबुचांत शिरून त्यास बळकट धराचें एवढाच याचा उपयोग असतो.

उदाहरणें.

(१) मळसूत्र ज्या रुखावर आहे, त्याचा व्यास २ इंच आहे, सूत्रांतर $\frac{1}{2}$ इंच आहे, तर त्यांत शक्ति व वजन यांमध्ये ममाण काय असेल?

$$उ. \frac{व}{व} = \frac{१}{१०६}$$

(२) एका मळसूत्राच्या दाबणींत मळसूत्राचा व्यास ३ इंच, मळसूत्राचें सूत्रांतर $\frac{1}{2}$ इंच आणि शक्ति लावण्याच्या उच्चाळकाची लांबी ३ फूट आहे. तर १ शेराच्या शक्तीनें किती शेरांचा दाब पडेल?

(२६०)

उ. १०५ $\frac{१}{२}$ शेर.

(३) साध्या मळसूत्राचा उच्चालक २ फूट आहे. सूत्राची जाडी किंवा सूत्रांतर $\frac{१}{२}$ फूट आहे. तर १०० शेरांची शक्ति उच्चालकास लाविल्यास किती शेरांचा दाब पडू शकेल.

उ. ६, २८३ शेर.

(४) संयुक्त मळसूत्रांत उच्चालकाची लांबी $१\frac{१}{२}$ फूट आहे. थोरल्या मळसूत्राचें सूत्रांतर $\frac{१}{२}$ इंच, आणि धाकट्याचें $\frac{३}{४}$ इंच आहे. जर ३० शेरांची शक्ति उच्चालकास लाविली तर दाबण्याच्या फळीवर किती शेरांचा दाब पडेल?

उ. १३५,७१ $\frac{१}{२}$ शेर.

(५) उच्चालकाची लांबी २ फूट, मोठ्या मळसूत्राचें सूत्रांतर १ इंच असेल, तर संयुक्त मळसूत्रांत एक पोंडाच्या शक्तीने $\frac{१}{२}$ दाबण्यास धाकट्या मळसूत्राचें सूत्रांतर किती असावे.

उ. ७२ इंच.

(६) अनंत मळसूत्रांत उच्चालकाची लांबी १०४ फूट आहे. चाकाच्या परिघावर दात्यांची संख्या ३० आहे. चाकाच्या कण्याची विज्या २ फूट आहे, तर उच्चालकास एक शेराची प्रेरणा लाविल्यास किती शेरांचें वजन उचलता येईल.

उ. २१० शेर.

(७) वरील उदाहरणांत २०० शेरांचें वजन उचललें जाण्यास चाकाच्या परिघावर दात्यांची संख्या काय असली पाहिजे?

उ. ४०

(८) एका $१\frac{१}{२}$ इंच उंचीच्या रूळावर मळसूत्राचे १९ फेरे आहेत. आणि जर याच्या $१\frac{१}{२}$ फूट लांबीच्या उच्चालकास २ हंडूवेद, १ कार्दर, १० पोंड इतकी शक्ति लाविली, तर अशा मळसूत्रापासून किती दाब उत्पन्न होईल.

उ. १४९ नं० टन.

(९) मळसूत्राचें सूत्रांतर $\frac{1}{2}$ इंच आहे. मळसूत्राच्या रुळाचा व्यास १ इंच आहे. आणि शक्ति १३९ शेरांची लाविलेली आहे, व हिच्या फिरण्यानें ३ फूट परीघाचें वर्तुळ होतें. तर मळसूत्राच्या सूत्रावर किती दाब पडेल.

उ. ३०, ०६६ शेर.

(१०) सूत्रांतर $\frac{3}{4}$ इंच आहे. मळसूत्राच्या रुळाचा व्यास $\frac{1}{2}$ इंच आहे तर सूत्राच्या एकाफेऱ्याची लांबी काढ?

उ. ५-९ इंच.

(११) शक्ति उच्चालकाच्या ज्या टोंकास लाविली आहे, तें टोंक फिरल्यानें जें वर्तुळ होतें. त्याचा परीघ ६ फूट आहे. तर शक्तीच्या १४४ पट वजन उचललें जाण्यास २ फूट उंचीच्या रुळावर मळसूत्राचे किती वेढे झाले पाहिजेत?

उ. ४८ वेढे.

(१२) मळसूत्राचा कोन ३० अंशाचा आहे. आणि उच्चालकाची लांबी मळसूत्राच्या रुळाच्या त्रिज्येच्या न पट आहे तर अशा मळसूत्रापासून यांत्रिकस्वार्थ किती मास होईल.

उ. $n\sqrt{3}$

(१३) उच्चालकाची लांबी १५ इंच असल्यास यांत्रिकस्वार्थ ३० मिळण्यास सूत्रांतर किती असावे?

उ. $\frac{9}{16}$ इंच.

(१४) अनंत मळसूत्राचें एक वजन उचललें आहे, व त्याचा यांत्रिकस्वार्थ १५ आहे, तर असें दाखवीव कीं, वजन जितक्या अवकाशां तस चढेल त्याच्या स पट अवकाशांतून शक्तीस फिरावें लागेल.

प्रकरण १३

घर्षण.

(१६,३) हा वेळ पावेतों ज्या पदार्थावर प्रेरणांचें कार्य होत होते ते सर्व पदार्थ अगदीं साफ व गुळगुळीत असे कल्पिते होते. परंतु वास्तविक तसा प्रकार नसून हर एक पदार्थ जास्त कमी रवरबरीत असतात. पदार्थाच्या पृष्ठभागावर उंचवटे असतात. पदार्थ कितीही गुळगुळीत दिसला तरी तो कांहींना कांहीं रवरबरीत असतो. आणि एका पदार्थाच्या पृष्ठभागावरून दुसरा पदार्थचलन पावला म्हणजे या उंचवट्यां पासून चलनास प्रतिबंध होतो. व या प्रतिबंधासुळे प्रेरणेच्या कार्यात सूट द्यावी लागते. यास्तव घर्षणाच्या परिणामाचा विचार यामकरणांत केला आहे.

एका पदार्थाच्या सपाटीवरून दुसऱ्या पदार्थाच्या सपाटीच्या चलनास प्रतिबंध होणार नाही तर त्या दोहों पदार्थाच्या पृष्ठभागांस गुळगुळीत असें म्हणतात. आणि जेव्हां त्यां पासून चलनास प्रतिबंध होईल, तेव्हां त्यांस रवरबरीत असें म्हणतात.

घर्षण— जेव्हा एका पृष्ठभागावरून दुसऱ्या पृष्ठभागास ओढीत असतां किंवा तो चलन पावत असतां जो प्रतिबंध होतो त्यास घर्षण असें म्हणतात. कारण एकाचे उंचवटे दुसऱ्याच्या रवाड्यांत शिरून चलनास प्रतिबंध होतो.

घर्षण ही प्रतिबंधक शक्ति आहे. हिच्यानें गतिदेवत नाही. पण गतिविशिष्ट पदार्थाच्या गतीचा ती नाश करू शकते. म्हणून जेव्हां पदार्थ प्रत्यक्ष चलन पावतो, किंवा त्याचा चलन पावण्याचा कळ असतो, तेव्हां मात्र या शक्तीचें कार्य घडते; म्हणजे जेव्हां पदार्थावर कार्य करणाऱ्या दुसऱ्या प्रेरणा समतोल नसतात, तेव्हां या

त्र घर्षणशक्तीचें कार्य घडतें तसेंच ही प्रतिबंधक शक्ति असल्यानें ज्या दिशेस पदार्थाचें चलन होत असेल. किंवा होणार असेल, त्याच्या उलट दिशेस घर्षणाचें कार्य घडतें. यास्तव कोणत्याही यंत्रांत त्यास समतोल ठेवण्यास जितकी शक्ति पाहिजे त्याहून जास्त शक्तीचें कार्य होत असेल तर वजनास शक्ति औढील, म्हणून शक्तीच्या विरुद्ध आणि वजनाशीं सरूप असें घर्षणाचें कार्य घडेल. परंतु शक्ती कमी असेल तर तिच्याशीं सरूप असें घर्षणाचें कार्य घडेल. जास्त वजनास कमी शक्तीनें तोलून धरवेल. परंतु त्या वजनास गति देण्यास त्याहून जास्त जोराची शक्ति लागेल हें उघड आहे.

अनेक प्रयोगांवरून घर्षणाविषयीचे खाली लिहिलेले नियम ठरविलेले आहेत.

(१) घर्षण काळानें वाढतें— जेव्हां दोन पदार्थ गति विशिष्ट असतील तेव्हां त्यांस तसेंच फिरत ठेवण्यास जितकी शक्ति लागेल, त्यापेक्षां, जेव्हां दोन पदार्थ परस्पर संनिधपण स्थिर असे कांहीं काळपर्यंत असतात, तेव्हां एकास दुसऱ्यावर सरकविण्यास जास्त शक्ति लागते. उदाहरणार्थ दोन ओकच्या लांकडाचे पृष्ठभाग कांहीं मिनिटें पर्यंत एकत्र राहिल्यावर एकावर दुसऱ्यास सरकविण्यास जो जोर लागतो, तो, आणि तेच तुकडे गतिविशिष्ट असतां त्यांस सरत ठेवण्यास जो जोर लागतो, यांमधील प्रमाण ६२:५० असें असते. तसेंच ओक लांकडाच्या पृष्ठभागावरून लोखंडाच्या पृष्ठभागास सरकविला, तेव्हा या दोहोंशक्तींमधील प्रमाण ६५:२६ असें होतें. घर्षणाचा जोर वाढण्यास जो काळ लागतो तो निरनिराळ्या पदार्थांनिरनिराळ्या मानानें लागतो. दोन्ही पृष्ठभाग लांकडाचेच असतील, तर ते दोन किंवा तीन मिनिटें संनिध राहतांच त्यांमध्ये अत्यंत घर्षण उत्पन्न होतें. परंतु धातूचे पृष्ठभाग बहुतेक एकत्र होतांच घर्षण प्रमाणाधीचें उत्पन्न होतें. परंतु लांकूड लोखंडावर ठेविलें तर कित्येक

दिवसांनीं घर्षणशक्ति परमावधीची होते.

(२) जेव्हां परस्पर संनिध असणारे पृष्ठभाग एकाच द्रव्याचे असतात तेव्हां त्यांमधील घर्षणशक्ति त्यांच्या दाबाच्या प्रमाणांत असते. —संनिध असलेल्या पृष्ठभागांच्या स्थितीवर घर्षणशक्ति अवलंबून असते. — जसें त्याचे तंतु परस्पर समांतर असतील किंवा एकमेकांशीं काटकोन करीत असतील, किंवा ते कोरडे असतील अगर स्निग्ध पदार्थ लाऊन तुळतुळीन केलेले असतील, त्याप्रमाणें घर्षणाचा जोर भिन्न भिन्न असेल. परंतु संनिध असलेल्या पृष्ठभागांच्या स्थितींत कांहीं फेरफार केला नाही, तर जसजसा दाब बदलावा त्या प्रमाणें घर्षणाचा जोरही त्यामानानें बदलतो आणि घर्षण व दाब यांमधील प्रमाण जोपर्यंत पदार्थ एकाच द्रव्याचे असतात तोपर्यंत कायम राहते. घर्षण आणि दाब यांमधील जेंहे कायमचें प्रमाण त्यासच **घर्षणगुणक** असें म्हणतात.

(३) दोन संनिध असलेल्या पदार्थांच्या सपाट्यांच्या विस्तारवर घर्षण अवलंबून असत नाहीं. उदाहरणार्थ असें समजू कीं, चार चौरस इंच क्षेत्राचा व चार क्षेत्र बजनाचा लोखंडी पत्रा एका दुगडाच्या पृष्ठभागावर ठेविला आहे. आतां जर आम्हीं असें कल्पिलें कीं, एक चौरस इंचाचा एक असे त्याचे चार तुकडे कापून वेगळे वेगळे ठेविले तर एकेक चौरस इंच तुकड्याचें घर्षण सर्व पत्र्याच्या $\frac{1}{4}$ घटेल. परंतु जर एका पत्र्यावर बाकी तीन पत्रे एकावर एक असे ठेविले, तर दाब चौपट वाढेल, व त्या प्रमाणें घर्षणही चौपट वाढेल. म्हणजे मूळच्या पृष्ठभागा इतकेंच घर्षण होईल सारांश एका चौरस इंचावर चौपट बजन ठेविल्यानें जें घर्षण होतें. तेंच चार चौरस इंचांवर तेबदेच बजन ठेविल्यानें घर्षण होतें.

हा नियम सर्वव्यापक आहे, असें नाहीं. जेव्हां पृष्ठभाग अति मोठे किंवा अति लहान असतात, तेव्हां हा नियम लागू पडत ना

हीं जेव्हां दोन पृष्ठभाग एका रेषेतच मात्र परस्परांस स्पर्श करितात, तेव्हां कांहीं क्षेत्राचे पृष्ठभाग स्पर्श करित असल्यापेक्षा घर्षण कमी घडते. फार मोठे पृष्ठभाग असल्याने घर्षण वाढते. तसेंच कापडासारख्या तंतुमय पदार्थांत घर्षण पृष्ठभागाप्रमाणें वाढते, आणि दात्राप्रमाणें कमी होते; आणि धातू, दगड, लांकूड इत्यादि कठीण पदार्थांस मात्र बरसां नियम लागू होतो. म्हणजे त्यांमधील घर्षण केवळ दाबाप्रमाणें वाढते.

(१६४) घर्षणगुणक — जर दोन संनिध असलेल्या पृष्ठभागांमधील दाब र असला आणि एक पृष्ठभाग दुसऱ्यावरून सरळ लागण्यास पृष्ठभागांच्या स्वरवरीतपणासुद्धें जें घर्षण घडते किंवा जो प्रतिबंध होतो तो घ अक्षरानें दर्शविला तर दाब आणि घर्षणांमधील प्रमाण $\frac{घ}{र}$ यास घर्षणगुणक म्हणतात. हा गुणक विवक्षित पदार्थांचा नेहमी कायमचा असतो. पहिल्या नियमाप्रमाणें घर्षण दाबाप्रमाणें बदलते. तें पृष्ठभाग लहान मोठे झाल्याने बदलत नसून केवळ पृष्ठभागांच्या द्रव्यांवर अवलंबून असते. घर्षणगुणक दर्शविण्यास ग अक्षर घेतलें तर:—

$$\frac{घ}{र} = ग, \therefore घ = गर.$$

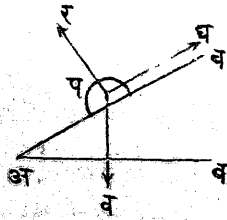
घर्षणगुणक हा विवक्षित पदार्थांचा कायमचा असतो. परंतु निरनिराळ्या पदार्थांचा निरनिराळा असतो व तो मत्पक्ष प्रयोगानें काढावा लागतो. शुणक समजण्यास घर्षण समजावें लागतें तें कसें काढिता येतें तें रवाळीं सांगितलें आहे.

दोन पदार्थांच्या पृष्ठभागांत परस्पर घर्षण किती घडते हें फार सुलभरीतीने काढता येतें. जर एखादा पदार्थ सपाट पातळीवर स्थिर ठेविला, तर घर्षण शक्तीचा व्यापार घडत नाही. परंतु पातळीवरून पदार्थांस सरकवूं लागलां तर पदार्थांच्या गतीस दोहोंच्या स्वरवरीत,

(१६६)

पृष्ठभागापासून प्रतिबंध घडतो. चासुकें हा प्रतिबंध काढण्याकरितां पृष्ठभागावर पदार्थ स्थिर असतां सपाटीपासून पृष्ठभाग वर उचलता-
न. येणेंकरून गुरुत्वाकर्षणानें पदार्थ रवाळीं सरकूं लागतो. आणि घ-
र्षणापासून त्यास प्रतिबंध होत असतो; आणि जेव्हां घर्षणाच्या प्रति-
बंधापेक्षां त्याचा रवाळीं जाण्याचा जोर जास्त होतो, तेव्हां पदार्थ रवा-
ळीं सरकूं लागतो. म्हणून पदार्थ रवाळीं सरकूं लागेपर्यंत, म्हणजे रवा-
ळीं सरकण्याच्या त्याच्या आंगीं कल येईपर्यंत पृष्ठभाग सपाटीपा-
सून वर उचलून हा घर्षणाचा प्रतिबंध मापितां येतो.

(१६७.) विसाव्याचा कोन समजा कीं, व वजनाचा प-
दार्थ अब या सपाट पातळीवर आहे. पदार्थ स्थिर असतां घर्षणा-
चा व्यापार घडत नाही. आतां अब पातळीचें अ टोंक सपाटीवर दे-
ऊन दुसरें ब टोंक वर थोडथोडें उचलीत गेलें, तर पृष्ठभाग अंगदीं
गुळगुळीत असल्यास अक्लिं चित उचलतांच पदार्थ रवाळीं सरकूं ला-
गेल, परंतु अब पातळी व तिजवरील पदार्थ यांच्या स्वरवरीत पणा-
मुकें पदार्थाच्या रवाळीं सरकण्यास प्रतिबंध होतो, आणि पातळीये-
दीशी वर उचलल्यानें पदार्थ रवाळीं सरत नाही. जरी गुरुत्वाकर्ष-
णानें पदार्थाच्या आंगीं रवाळीं सरण्याचें सामर्थ्य येतें, तरी घर्ष-
णाचा प्रतिबंध त्यास रवाळीं जाऊं देत नाही. याप्रमाणें अब पा-
तळीचें ब टोंक अधिकाधिक उचलीत गेलें म्हणजे अब पातळी
नें क्षितिज सपाटीशीं विवक्षित अंशाचा कोन केंला कीं, पदार्थ



रवाळीं सरकूं लागतो. या कोनाच्या
आंत कितीही पातळी चढविली तरी प-
दार्थ स्थिर राहतो. चास्तव या मर्या-
देच्या कोनास विसाव्याचा कोन अ-
सें म्हणतात. कारण या मर्यादेच्या आं-
त सर्व स्थितीत पदार्थास विसावा सि-

ब्रह्मते किंवा तो घर्षणाच्या प्रतिबंधाने स्थिर राहतो. या विसाव्याच्या कोनाइतकी पातळी उचळी पर्यंत घर्षण पदार्थास समतोल धरिते, म्हणून एवढ्या कलाच्या गाफ गुळगुळीत उतरणीवर व वजनाच्या पदार्थास समतोल धरण्यास जेवढी शक्ति लागेल, तेवढा घर्षणाचा प्रतिबंध असतो.

असें समजूं कीं अब पातळी ९ चे कोनांतून चढविल्या बरोबर प पदार्थ सरकू लागण्याच्या स्थितींत येतो, म्हणजे समतोल राहण्याची त्याची मर्यादा होते, अशा स्थितींत पदार्थावर त्याचें व वजन अब पायाशीं लंब अशा पच या दिक्क्रेषेंत कार्य करिते अब उतरणीचा र प्रतिबंध अब उतरणीच्या सपाटीशीं लंब अशा पर दिशेंत कार्य करितो. आणि घ घर्षण अब उतरणीशी समांतर अशा पघ दिशेंत कार्य करिते आणि या तीन मेरणांनीं प पदार्थ समतोल आहे. यास्तव उतरणीच्या नियमा ममाणें (कलम १४५ पहा.)

$$\frac{\text{घ}}{\text{व}} = \frac{\text{बब}}{\text{अब}} \quad \text{भु. श.} \dots \dots (१)$$

$$\frac{\text{र}}{\text{व}} = \frac{\text{अब}}{\text{अब}} \quad \text{को.भु. श.} \dots \dots (२)$$

(१) यास (२) यानें भागून.

$$\frac{\text{घ}}{\text{र}} = \frac{\text{बब}}{\text{अब}} \quad \text{स्पर्शरे. श.}$$

$$\therefore \text{घ} = \text{र. स्पर्शरे. श.}$$

$$\text{किंवा } \text{घ} = \text{व. भु. श.}$$

$\frac{\text{घ}}{\text{र}}$ यास घर्षणाचा गुणक म्हणतात, व तो नेहमी विसाव्याच्या कोनाच्या स्पर्शरेषेबरोबर असतो असें सिद्ध झालें. हा गुणक ग अक्षरानें दर्शविताना म्हणून:-

$\frac{\text{घ}}{\text{र}} = \text{ग}, \therefore \text{घ} = \text{गर}$

किंवा. ग = स्पर्शरे श्.

या प्रमाणे मत्यक्ष प्रयोग करून हव्या त्या दोन पृष्ठभागांमधील घर्षण किंवा त्यांच्या घर्षणाचा गुणक काढितां येतो.

(१६६) यंत्रस्थितिशास्त्रांत आम्हांस समतोल प्रेरणांचा विचार कर्तव्य असतो, म्हणून एक पृष्ठभाग दुसऱ्या वरून मत्यक्ष सरत असतां किंवा चलन पावत असतां जें घर्षण घडेल. म्हणजे घर्षणापासून प्रतिबंध घडेल, त्या विषयी विचार करणें नाहीं; तर जेव्हां एक पृष्ठभाग दुसऱ्यावरून मत्यक्ष सरत नसून केवळ सरण्याच्या स्थितींत येतो, त्यावेळीं जें घर्षण घडतें त्याचा विचार करणें असतो. यावेळीं एका पृष्ठभागाच्या आंगीं दुसऱ्यावरून सरपटण्याच्या कल मात्र आलेला असतो म्हणून घर्षणशक्तीनें समतोल धरण्याची मर्यादा होते. म्हणजे घर्षणशक्तीचीही परमावधि असते. समतोलत्व राखण्यांत जेव्हां या परभावधीच्या घर्षणशक्तीचें कार्य घडतें तेव्हां पदार्थ चलनप्रांत किंवा चलनकल्प स्थितींत आहे असें म्हणतात; आणि या अवस्थेंत समतोल स्थितींत पदार्थ आला म्हणजे घर्षण मर्यादा झाली असें समजावें. ही मर्यादा प्राप्त होण्यास जो सपाट पृष्ठभागास कल द्यावा लागतो, त्या कलास विसाव्याचा कोन म्हणतात. क्षितिज सपाटीपासून या कोनाहून लहान असा कोणताही कोन पृष्ठभागानें केला तर त्या स्थितींत घर्षणशक्तीनें पदार्थ समतोल राहतो.

यास्तव घर्षण संबंधीं यंत्रस्थितिशास्त्रातील कृत्यें व उदाहरणें करितांना दोन गोष्टी काढाव्या लागतात. (१) घर्षणमर्यादा आणि (२) समतोलत्वाच्या सीमा म्हणजे क्षितिज सपाटीपासून कोनपर्यंत कोणत्याही स्थितींत घर्षणशक्तीनें पदार्थ समतोल राहिल, त्या

हे असें समजूं.

तुळीवर स्वाळीं लिहिल्याप्रमाणें ४ प्रेरणांची कार्ये होत आहेत. डअक पातळी चार प्रतिबंधद्वार या दिक् रेषेंत कार्य करीत आहे. डअक पातळीचें घ घर्षण डघ या दिशेनें कार्य करीत आहे. अब या गुळगुळीत उतरणीचा स प्रतिबंध अबशीं लंब अशा इस दिशेनें कार्य करीत आहे. आणि तुळीचें व वजन तुळीचा गुरुत्वमध्य ग या ठिकाणीं गव या दिक् रेषेंत कार्य करीत आहे. या सर्व प्रेरणांचीं तुळी समतोल आहे. म्हणून या प्रेरणांचे दिक् रेषांत व त्यांशीं लंब अशा रेषांत पृथक्करणकेल्यास दिक् रेषांतील पृथग्भूत भागांची बेरीज शून्य असेल, व दिक् रेषांशीं लंब अशा दिशांतील पृथग्भूत भागांची बेरीज ही शून्य असेल. यास्तव-

$$\text{घ} - \text{स. भु. थ} = 0 \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{र} - \text{व} + \text{स. को. भु. थ} = 0 \dots \dots \dots (२)$$

घ = गर ही किंमत (१) यांत लिहून व स्थलांतर करून.

$$\text{गर} = \text{स. भु. थ.} \dots \dots \dots (३)$$

(२) यास गनें गुणून व स्थलांतर करून-

$$\text{गर} = \text{गव} - \text{गस. को. भु. थ.}$$

$$\dots \text{स. भु. थ} = \text{गव} - \text{गस. को. भु. थ.}$$

$$\text{स} (\text{भु. थ} + \text{ग. को. भु. थ.}) = \text{गव.}$$

$$\dots \text{स} = \frac{\text{गव}}{\text{भु. थ.} + \text{ग. को. भु. थ.}} \dots \dots \dots (४)$$

ही किंमत (३) यांत लिहून-

$$\text{गर} = \frac{\text{गव. भु. थ.}}{\text{भु. थ.} + \text{ग. को. भु. थ.}}$$

$$\therefore r = \frac{व.भु.७}{भु.७ + ग.को.भु.७} \dots \dots \dots (५)$$

ग घर्षणगुणक विवक्षित पदार्थाचा माहीत असतो, किंवा मा-
गे सांगितल्याप्रमाणे प्रत्यक्ष प्रयोगाने काढितां येतो. आतां आ-
म्हांस घ कोन काढणे आहे.

वरील मेरणांच्या दुं भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य
असली पाहिजे.

$$व.डग. को.भु. घ - स.डग. को.भु. (७ - घ) = ० \dots (६)$$

$$डग. = २.डग.$$

$$\therefore व. को. भु. घ = २स. को. भु. (७ - घ)$$

यांत (५) यांतील स ची किंमत लिहून.

$$व. को. भु. घ = \frac{२गव. को.भु. (७ - घ)}{भु.७ + ग. को. भु. ७}$$

$$\therefore को. भु. घ = \frac{२ग. को. भु. (७ - घ)}{भु.७ + ग. को. भु. ७} \dots \dots \dots (७)$$

यांतील ग आणि ७ माहीत असल्यासुद्धें घ ची किंमत का-
ढितां येईल. घ कोन समजला म्हणजे समतोलत्वाची अखेर मर्यादा
म्हणजे घर्षणमर्यादा समजते. आतां कोरपासून कोरपर्यंत समतोलत्व
राहतें. हे काढावयाचें राहिलें.

(७) या समीकरणाचे छेद सोडवून.

$$भु.७. को. भु. घ + ग. को. भु. ७. को. भु. घ = २ग. को. भु. (७ - घ)$$

$$\therefore ग = \frac{भु.७ को. भु. घ}{२को. भु. (७ - घ) - का. भु. ७. का. भु. घ}$$

$$ग = \frac{भु.७. को. भु. घ}{२को. भु. ७. को. भु. घ + २भु. ७. भु. घ - को. भु. ७. को. भु. घ}$$

$$ग = \frac{भु.७. को. भु. घ}{को. भु. ७. को. भु. घ + २भु. ७. भु. घ}$$

(२७२)

अंश व छेद यांस को. भु. ७. को. भु. घ यात्रे भाग्युन.

$$ग = \frac{\text{स्पर्शरे. ७.}}{१ + २ \text{ स्पर्. ७. स्पर्. घ.}} \dots \dots \dots (८)$$

$$\text{आतां घ} = ०, \text{ तर } ग = \text{स्पर्शरे. ७.} \dots \dots (९)$$

जेव्हां घ = ० असेल तेव्हां तुळी अगदीं आडवी पडेल व घर्षण अत्यंत घडेल. म्हणून स्पर्शरे. ७ ही गची महत्तम किंमत झाली.

$$\text{जेव्हां घ} = ७, \text{ तेव्हां } ग = \frac{\text{स्पर्. ७}}{१ + २ \text{ स्पर्. ७}} \dots (१०)$$

घ ची किंमत ७ म्हणजे अत्यंत मोठी होय. घ केवळ ७ बरोबर असू शकणार नाही. कारण असे झाल्याने तुळी उतरणीशीं समांतर होऊन तिजवर टेंकणार नाही. म्हणून घची किंमत अगदीं ७ जवळ जवळ मात्र असू शकेल; व अशावेळीं गची किंमत अत्यंत लहान होईल. म्हणून (१०) यातील गची किंमत लघुत्तम होय.

यास्तव घची किंमत ० क्षाणि ७ यामध्ये आहेत, म्हणून—
(१) जेव्हां घर्षणगुणक ग, स्पर्शरे. ७ पेक्षा कमी नसेल. तेव्हां तुळी कोणत्याही स्थितीत समतोल राहील.

(२) जर घर्षणगुणक ग याची किंमत स्पर्शरे. ७ आणि $\frac{\text{स्पर्शरे. ७}}{१ + २ \text{ स्पर्. ७}}$ यांमध्ये असेल तर ७ आणि (७) व (८) या समीकरणावरून जी मर्यादा निघेल या दोहोंमध्ये घची हवी ती किंमत असू शकेल.

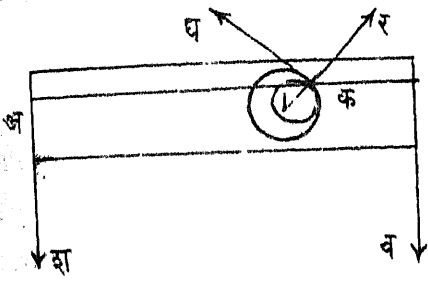
(३) जर घर्षणगुणक $\frac{\text{स्पर्. ७}}{१ + २ \text{ स्पर्. ७}}$ याहून लहान असेल.

तर तुळी कोणत्याही स्थितीत समतोल राहणार नाही.

(१६८) घर्षणयुक्त उच्चालक.

असें समसूची, अथवा भरीव उच्चालकास नळीसारखे गोल

भोंक पाडिलें आहे, व त्यांत निचा भरीव गोल आंस आहे. आंस स्थिर असून त्यावर उच्चालक मात्र फिरतो. म्हणून एवरवरीन ओसाचे भोंकाच्या आंतली पृष्ठभागावर मात्र घर्षण घडेल. आंसाशी लंब अशा पातळीनें आंस व भोंक यांस छेदित्यास गोल भोंकाचे छिन्न खालील आकृतीतील बाहेरील वर्तुळ दर्शविनें, आणि आंसाचे



छिन्न आंतली वर्तुळ दर्शविनें. या छिन्नाच्या पातळीनें व अथ उच्चालकावर त्याच्याशी लंब अशा दिशांत हा आणि व यांचा कार्य घडत आहेत. दोन्ही वर्तुळां असमान असल्यामुळे फक्त

एका बिंदूनेच स्पर्श करतील; क या बिंदूत नीं स्पर्शराम स्पर्श करितात असें समजू. याच ठिकाणीं एवरवरीन आंसाचा मतिबंध उच्चालकावर होईल. व त्याची दिशा दोहों वर्तुळांची कतून जाणारी जी साधारण चिज्या त्या रेषेंत असेल. हा मतिबंधर असून कर रेषेंत कार्य करीत आहे, असें समजू. घर्षणशक्ति यारेपेडीं लंब अशा दिशेंत म्हणजे क तून जाणाऱ्या साधारण स्पर्शरेषेंत कार्य करील. श, व, र आणि घ याचार प्रेरणांची उच्चालक समतोल आहे.

जेव्हां उच्चालक अगदीं समतोल असेल, तेव्हां आंसाचा मतिबंधर दिक् रेषेंत कार्य करील व त्यावेळीं घर्षणाचाही व्यापार घडणार नाही. परंतु जेव्हां शक्ति किंवा वजन खालीं सरेल तेव्हां या मतिबंधाची दिशा दिक् रेषेडीं काहीं कळती राहिल. असें समजूकीं, हा कल ९० आहे. जेव्हां व वजनाचा खालीं जाण्याचा कल असेल तेव्हां आकृतीत दाखविल्या ममाणें या मतिबंधाची दिशा कतून जाणाऱ्या दिक् रेषेच्या उच्चालकाकडे असेल आणि

(८)
 (९)
 इतक घर्षण
 मत झाली.
 (१०)
 वरु ७ बरो
 तिशीं समां-
 नगदीं थज
 अत्यंत ल-
 म होय.
 म्हणून-
 उभी नसेल.
 आणि
 प्रासमीकर
 किंमत अ-
 न असेल.
 तर रेषें गोल

ज्ञाचा रवालीं जाण्याचा कल असेल, तेव्हा डाव्या बाजूकडे असेल तसेच घर्षणाचा व्यापार रच्या दिशेशी लंब अशा दिशांत नेहमी होईल. परंतु व किंवा ज्ञा रवालीं जाऊं लागतील त्यांच्या उलट घर्षणाचा व्यापार घडेल. आकृतींत व रवालीं जाऊं लागत आहे, असे कल्पिलें म्हणून घर्षणाच्या व्यापाराची दिशा कथ्य आहे.

बाहेरील वर्तुळाची म्हणजे गोल भोंकाची त्रिज्या त आणि या वर्तुळाच्या मध्यापासून ज्ञा आणि व यांच्या दिशांवर काढलेल्या लंबाच्या लांब्या न आणि म कल्पूं.

या प्रेरणांचीं दिक्करेषांत व त्याशीं लंब अशा रेषांत पृथक्करणें केल्यास:-

$$रभु.७ - घ.को.भु.७ = ० \dots \dots \dots (१)$$

$$र.को.भु.७ + घ.भु.७ - श - व = ० \dots \dots \dots (२)$$

क विंदुभोंवतालची भ्रामकलें घेऊं. बाहेरील वर्तुळाच्या मध्यापासून ज्ञा आणि व यांच्या दिशांवरील लंब न आणि म आहेत. म्हणून क पासून ज्ञा आणि व यांच्या दिशांवरील लंब— (न+रभु.७) आणि (म-रभु.७) होतात आणि घ आणि र यांची भ्रामकलें शून्य असतील. कारण क त्याच्या दिशांत आहे.

$$\therefore श(न+रभु.७) = व(म-रभु.७) \dots \dots \dots (३)$$

जर ज्ञा रवालीं सुरू लागेल, तर कर प्रेरणा दिक्करेषेच्या डाव्या बाजूस असेल, आणि वरील समीकरण असें होईल:

$$श(न-रभु.७) = व(म+रभु.७) \dots \dots \dots (४)$$

आतां घ = गर ही किंमत घेऊं. अशा वेळीं समतोलत्वाच्या मर्यादेच्या स्थितींत घर्षणगुणक ग असतो. ही किंमत (१) यांत लिहितां हून:-

$$रभु.७ - गर.को.भु.७ = ०$$

$$\therefore भु.७ = ग.को.भु.७; \quad \therefore स्पर्शरे.७ = ग.$$

(२७५)

यावरून ७ कान समजतो. (३) व (४) यांवरून हा आणि व
यांमधील यमाण समजते. (१) आणि (२) यांपासून र आणि घ
काढितां येतात.

आतां व रवालीं जाऊं लागण्याच्या स्थितींत असतां समतोलत्वा-
च्या अखेर मर्यादेच्या स्थितींत.

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{म - र\sqrt{७}}{न + र\sqrt{७}} \dots \dots \dots (५)$$

आणि हा रवालीं जाऊं लागण्याच्या स्थितींत असतां.

$$\frac{श}{व} = \frac{म + र\sqrt{७}}{न + र\sqrt{७}} \dots \dots \dots (६)$$

यासव जेव्हां $\frac{श}{व}$ याची किंमत या दोहोंच्या मध्ये असेलते-
व्हां नेहमी समतोलत्व राहिल.

$$ग = स्पर्शरेः ७ = \frac{\sqrt{७}}{को\sqrt{७}}$$

$$\frac{ग}{को\sqrt{७}} = \frac{ग}{१ + ग} = \frac{\sqrt{७}}{\sqrt{७} + को\sqrt{७}} = \frac{\sqrt{७}}{\sqrt{७}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{७}}{को\sqrt{७}} = \frac{ग}{१ + ग}$$

ही किंमत (५) व (६) यांत लिहून-

$$\frac{श}{व} = \frac{म - र \times \frac{ग}{\sqrt{१+ग}}}{न + र \times \frac{ग}{\sqrt{१+ग}}} = \frac{म - \frac{गर}{\sqrt{१+ग}}}{न + \frac{गर}{\sqrt{१+ग}}}$$

$$\text{किंवा } \frac{श}{व} = \frac{म + \frac{गर}{\sqrt{१+ग}}}{न - \frac{गर}{\sqrt{१+ग}}}$$

(२७६.)

यांत म, न, र आणि ग माहीत आहेत.

आतां उच्चारकाचें वजन व हिशेबांत धरूं. ते गुरुत्व मध्या-
न कार्य करील. ग हा गुरुत्वमध्य आहे. आणि त्याचे बाहेरील व
तुळाच्या मध्यापासून अंतर प आहे असें कल्पूं. तर जेव्हां झ
खाळीं जाऊं लागेल तेव्हां क भोंवतालचीं आमकतें घेऊन.

$$श(न-रभुः७) + व(प-रभुः७) = व(म+रभुः७)$$

आणि जेव्हां व खाळीं जाऊं लागेल तेव्हां

$$श(न+रभुः७) + व(प+रभुः७) = व(म-रभुः७).$$

(१६९) घर्षणयुक्त उच्चारक व कणा - चाक वकणा
पहिल्या प्रकारचा उच्चारक आहे. त्याचा मध्य व गुरुत्वमध्य एकच अ-
सतात, म्हणून जरचाकाची त्रिज्या न, कण्याची त्रिज्या म, आणि त्या
दोहोंचें वजन व असल्यास समतोलत्वाच्या मर्यादा खाळील स-
मीकरणें दर्शवितील.

$$श(न+रभुः७) + व(रभुः७) = व(म+रभुः७)$$

(१७०) एक अचलकपी समानभुजांच्या पहिल्या प्रकार-
चाच उच्चारक आहे. हिचा मध्य व गुरुत्वमध्य एकच असतात. म्ह-
णून कपीची त्रिज्या न आणि आंसाची त्रिज्या पूर्वीं ममाणें र त-
र जीवरील दोऱ्यांचे भाग समांतर आहेत अशा घर्षणयुक्त एका
अचलकपीच्या समतोलत्वाच्या मर्यादा खाळील समीकरणें दर्शवि-
तील.

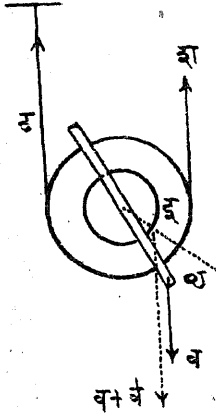
$$श(न+रभुः७) + व(रभुः७) = व(न+रभुः७).$$

(१७१) घर्षणयुक्त एकाचलकपीच्या समतोलत्वाच्या मर्यादा
काढणें.

कपीची त्रिज्या त आणि आंसाची त्रिज्या त घेऊं. चौकटी
सकट कपीचें वजन व आहे आणि शक्तीचा वजनास उचलण्याचा
कल आहे असें समजूं.

(२७७)

शक्तीचें कार्य वरच्या बाजूस दिक्कुरेपेंत होत आहे. दुसऱ्या बाजूच्या दोरीचा ताण T घेऊं. त्याचें कार्य दिक्कुरेपेंत पण खालच्या बाजूस होईल. v आणि v' यांचीही कार्ये दिक्कुरेपेंत खालच्या बाजूस होतील. यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा आंसास θ ठिकाणीं मिळते. आंसाच्या प्रतिबंधाची दिशा या रेषेशीं θ कोन करिते असें घेऊं. याच स्थळीं घर्षणाचा व्यापार उलट दिशेस होईल व हाच विसाव्याचा कोन असेल. कप्पीच्या क मध्या भोंवतालचीं भ्रामकत्वे घेऊं. z आणि T यांच्या दिशांबरील क पासूनचे लंब त वरोबैर आहे. आणि $v + v'$ च्या दि-



शेवरील क पासूनचा लंब त भु θ असेल.

$$z \sin \theta = T + (v + v') \sin \theta$$

$$\text{परंतु } T = v + v' - z \cos \theta$$

$$\therefore z \sin \theta = (v + v') - z \cos \theta + (v + v') \sin \theta$$

$$\therefore 2 z \sin \theta = (v + v') (1 + \sin \theta)$$

जर v चा खालीं जाण्याचा कल असेल तर घर्षणाचा व्यापार उलट दिशेस होईल.

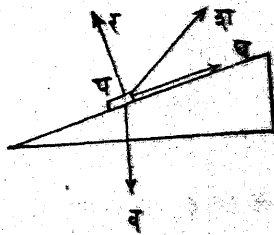
$$\therefore 2 z \sin \theta = (v + v') (1 - \sin \theta)$$

या दोन मर्यादा निघाल्या.

(१७२) घर्षणयुक्त उतरण.

उतरणीचा कल θ आहे.

v वजनच्या प पदाधिवर z शक्तीचें प z दिशेनें कार्य होत आ-



हे पश्चिम दिशा उतरणीच्या सपाटीशीं घृ कोन करिते.

पदार्थ उतरणीवरून रवालीं उतरणार किंवा वर चढणार, म्हणून घर्षणशक्तीचा व्यापार नेहमी उतरणीच्या सपाटीशी होणार. पदार्थाचा रवाली जाण्याचा कल असेल, तेव्हां तिचे कार्य पश्चिम दिशेनें होईल; वर जाण्याचा कल असेल तेव्हां याच्या उलट होईल. असें समजूं कीं पदार्थाचा रवाली जाण्याचा कल आहे. उतरणीच्या सपाटीचा प्रतिबंध र तिच्याशीं काठकोन करणाऱ्या दिशेंत कार्य करील. घर्षणगुणक ग असेल तेव्हां गर घर्षणशक्ति होईल. शत्रु आणि गर किंवा घृ यांनीं पदार्थास समतोल धरिते आहें. उतरणीच्या सपाटीच्या दिशेंत व तिच्याशीं लंब अशा दिशांत यांचीं पृथक्करणे करून.

$$\text{गर} + \text{श.को.भु.घ} - \text{व.भु.घ} = 0 \dots \dots (१)$$

$$\text{र} + \text{श.भु.घ} - \text{व.को.भु.घ} = 0 \dots \dots (२)$$

(२) यांतिल र ची किंमत (१) यांत लिहून-

$$\text{गव.को.भु.घ} - \text{ग.श.भु.घ} + \text{श.को.भु.घ} - \text{व.भु.घ} = 0.$$

$$\therefore \text{श. (को.भु.घ} - \text{ग.भु.घ}) = \text{व. (भु.घ} - \text{ग.को.भु.घ})$$

$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{भु.घ} - \text{ग.को.भु.घ}}{\text{को.भु.घ} - \text{ग.भु.घ}} \dots \dots (३)$$

जर वजनाचा वर चढण्याचा कल असेल. तर घर्षणाचा व्यापार उलट दिशेस होईल; म्हणजे वरच्याच समीकरणांत गर ची किंमत - गर होईल.

$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{भु.घ} + \text{ग.को.भु.घ}}{\text{को.भु.घ} + \text{ग.भु.घ}} \dots \dots (४)$$

म्हणून जेव्हां $\frac{\text{श}}{\text{व}}$ याची किंमत या दोहोंच्या मध्ये असेल, तेव्हा समतोलत्व राहिल. म्हणून साधारण सारणी अशी झाली.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{सु७क गकोभु७}}{\text{कोभु७क गभु७}} \dots \dots (५)$$

(१) जर हा उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करित असेल तर घ = ० आणि

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \text{सु७क गकोभु७}$$

(२) जर शक्ति उतरणीच्या पाचाशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करित असेल, तर घ = -७

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{सु७क गकोभु७}}{\text{कोभु(-७)क गभु(-७)}} = \frac{\text{सु७क गकोभु७}}{\text{कोभु७क गभु७}}$$

कारण को.भु.(-७) = को.भु७, भु.(-७) = - सु७.

(३) जर पदार्थ क्षितिज सपाटीशीं समांतर अशा सपाटीवर असेल तर ७ = ० आणि.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{ग}}{\text{को.भु.घक गभुघ}}$$

जर हा बिसाव्याचा कोन असेल तर स्प.म = ग; ही गची किंमत वरील (३) व (४) यांत लिहूय-

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{सु७-स्प.म.कोभु७}}{\text{को.भु.घ-स्प.म.भुघ}} = \frac{\text{सु७.को.भु.म-भु.म.कोभु७}}{\text{को.भु.घ.को.भु.म-भु.म.सु७}} = \frac{\text{सु७(७म)}}{\text{कोभु(७म)}}$$

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{सु७क+स्प.म.सु७}}{\text{को.भु.घ+स्प.म.भुघ}} = \frac{\text{सु७.को.भु.म+भु.म.कोभु७}}{\text{को.भु.घ.को.भु.म+भु.म.सु७}} = \frac{\text{सु७(७म)}}{\text{कोभु(७म)}}$$

(१) जर शक्ति उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर असेल तर घ = ०.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{सु७(७म)}}{\text{को.भु.म}}, \text{ किंवा } \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{सु७क गकोभु७}}{\text{व}}$$

(२) जर उतरणीच्या पाचाशीं समांतर असेल तर घ = -७.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{सु७(७म)}}{\text{कोभु(-७म)}} = \frac{\text{स्प.७क स्प.म}}{\text{७.स्प.७.स्प.म}}$$

उह
र.
दिशे
अ
व्या
ह
इलि.
आ
दि-

)

व्या
र

प्रं
५

(२८०)

स्वप्न ग, ही किंमत लिहून.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{स्व.७+ग}}{१\pm\text{गस्व७}}$$

(१७३) उतरणीवरून पदार्थास रवाळीं जाऊं न देण्यास अगदी कमी अशी शक्ति किती लागेल, हें काढणें आहे, असें कल्पूं. पदार्थाचा रवाळीं जाण्याचा कल असतो तेव्हां शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण असें असतें.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{भु}(७-प्र)}{\text{को.भु}(घ+प्र)}$$

$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{व.भु}(७-प्र)}{\text{को.भु}(घ+प्र)}$$

शाची किंमत अगदी कमी होण्यास छेद अत्यंत मोठा झाला पाहिजे. अत्यंत मोठी को.भु जिच्या म्हणजे १ आहे व ती ० कोनाची असते. म्हणून जेव्हां को.भु. (घ+प्र) = १, म्हणजे घ+प्र = ० आणि घ = - प्र असेल, तेव्हां शाची किंमत अत्यंत कमी होईल. व तिची किंमत अशी असेल. श = व भु(७-प्र). यास्तव उतरणीच्या सपारीच्या रवालच्या बाजूस विसाव्याच्या कोनाइतका कोन करणाऱ्या दिशेंत शाक्तीचे कार्य घडले पाहिजे. म्हणजे ही शक्ति पदार्थास रवाळीं जाऊं देणार नाही.

तसेंच पदार्थास उतरणीवर चढविण्यास अत्यंत कमी अशी शक्ति किती लागेल हें काढणें आहे. असें कल्पूं. जेव्हां पदार्थाचा वर जाण्याचा कल असतो तेव्हां शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण असें असतें.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{व}(७+प्र)}{\text{को.भु}(घ-प्र)}$$
$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{व.भु}(७+प्र)}{\text{को.भु}(घ-प्र)}$$

जंकां कांभु (घ-प्र) = १ म्हणजे घ-प्र = ० आणि घ = प्र
 असेल, तेव्हा श्चा ची किंमत अत्यंत कमी असेल. श्चा = व भु (७+प्र)
 एवढ्या शक्तीने पदार्थाचा वर जाण्याचा कळ मात्र असेल. याहून य-
 किंचित जास्त शक्ति झाली कीं पदार्था वर चढेल. यावरून हें उघ-
 द. झालं कीं. उतरणीवरून पदार्था चढविण्यास शक्ति लावण्याची उ-
 त्तम दिशा म्हणजे उतरणीशीं विसाव्याच्या कोनाएवढा कोन करणा-
 री होय.

आतां यांत जर ७ = ० असेल म्हणजे पदार्था उतरणीवर
 नसतां क्षितिजसपाटीवर असेल तर श्चा = व भु म्हणजे खरब-
 रीत अशा सपाट पातळी वरून एकावे वजन सरकविण्यास अ-
 गदीं कमी शक्ति लाविणें झाल्यास विसाव्याच्या कोना इतक्या स-
 पाट पातळीशीं कोन करणाऱ्या दिशांत शक्ति लाविली पाहिजे. आ-
 णि जेव्हा श्चा = व भु श्चा असेल तेव्हा पदार्था चलनभास अ-
 सेल.

(१७३) घर्षणयुक्त मळसूत्र.

मळसूत्र उतरणीचा रूपभेद आहे. मळसूत्राच्या दांड्या-
 ची त्रिज्या त, शक्ति लाविलेल्या उच्चाळाची लांबी त आणि
 मळसूत्राचा कोन ७ आहेत असें कल्पुं मळसूत्राचा एक वेढा उ-
 लगडळा असतां जी उतरणां होणे, तिच्या सपाटीच्या अनेक बिं-
 दूवर वजन आणि शक्ति पसरलेलीं असतात. तसेंच सूत्राचा म-
 तिबंधही त्यांच्या अनेक बिंदूवर पसरलेला असतो. व हे मतिबंध
 पृष्ठभागाशीं काढकोन करणाऱ्या दिशांत कार्य करितात. अनेक
 बिंदूवर $w_1, w_2, w_3, w_4 \dots$ इत्यादि वजनें $sh_1, sh_2, sh_3,$
 $sh_4 \dots$ इत्यादि शक्ति, आणि r_1, r_2, r_3, r_4 इत्यादि म-
 तिबंध आहेत. घर्षणयुक्त ग आहे. जेव्हा वजनाचा जोर श-

लिहून जास्त होत आहे. तेव्हा घर्षणयुक्त उतरणीच्या नियमाप्रमाणे:-

$$\left. \begin{array}{l} \frac{श_१}{व_१} = \frac{भु७-गकोभु७}{कोभु७+गभु७} \\ \frac{श_२}{व_२} = \frac{भु७-गकोभु७}{कोभु७+गभु७} \\ \vdots \\ \frac{श_n}{व_n} = \frac{भु७-गकोभु७}{कोभु७+गभु७} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{श_१+श_२+\dots+श_n}{व_१+व_२+\dots+व_n} = \frac{भु७-गकोभु७}{कोभु७+गभु७} \\ \frac{श_१+श_२+श_३+\dots+श_n}{व_१+व_२+व_३+\dots+व_n} = \frac{शत}{त} \\ \dots \\ \frac{श_१+श_२+श_३+\dots+श_n}{व_१+व_२+व_३+\dots+व_n} = \frac{शत}{त} \end{array}$$

या किमती वरील समीकरणांत लिहून.

शत

त = $\frac{भु७-गकोभु७}{कोभु७+गभु७}$

व = $\frac{कोभु७+गभु७}{कोभु७-गभु७}$

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{त}{त} \times \frac{भु७-गकोभु७}{कोभु७+गभु७}$$

जेव्हा वजनानून शक्तीचे माबल्य जास्त असेल तेव्हा.

$$\frac{श}{व} = \frac{त}{त} \times \frac{भु७+गकोभु७}{कोभु७-गभु७}$$

म्हणून समतोलत्वाच्या मर्यादेच्या स्थितीत शक्ति आणि वजन

$$न \quad \text{चा मधील प्रमाण} \quad \frac{त}{त} \times \frac{भु७-गकोभु७}{कोभु७+गभु७} \quad \text{आणि}$$

$$\frac{त}{त} \quad \frac{भु७+गकोभु७}{कोभु७-गभु७} \quad \text{या दोहोंमध्ये असेल म्हणजे जोपर्यंत शक्ति}$$

आणि वजन चा मधील प्रमाण या दोहोंमध्ये असेल, तोपर्यंत समतोल राहील. म्हणून-

$$\frac{श}{व} = \frac{त}{त} \times \frac{भु७+गकोभु७}{कोभु७-गभु७} \quad \dots \dots \dots (१)$$

गम

को घुण्णै अंश व छेद यांस भाग्युनः-

$$\frac{\text{श त}}{\text{व त}} \times \frac{\text{स्प. ७५ ग}}{१ \pm \text{गस्प. ७}} \dots \dots \dots (२)$$

धुण्ण

धुण्ण

र

त

र

न

जर शक्ति त लांबीच्या उच्चालकानें लाविली नसेल आणि मळसूत्राच्या पृष्ठभागाचें लागू केली असेल, तर त = त.

$$\therefore \frac{\text{श त}}{\text{व त}} = \frac{\text{स्प. ७५ ग}}{१ \pm \text{गस्प. ७}} \dots \dots \dots (३)$$

$$\text{स्प. ७} = \frac{\text{सूत्रांतर}}{\text{मळसूत्राचा परीघ}} = \frac{\text{अ}}{\text{२मत}}$$

ही किंमत (०) यात लिहून.

$$\frac{\text{श त}}{\text{व त}} = \frac{\frac{\text{अ}}{\text{२मत}} \times \text{ग}}{१ \pm \text{ग} \times \frac{\text{अ}}{\text{२मत}}} = \frac{\text{त}}{\text{त}} \times \frac{\text{अम २मतग}}{\text{२मत} \pm \text{गअ}}$$

जर त = त तर

$$\frac{\text{श त}}{\text{व त}} = \frac{\text{अम २मतग}}{\text{२मत} \pm \text{गअ}}$$

ज

(१७४) याच सारण्या, याहून सरळभरीतीनेंही काढितां

घेतान.

मळसूत्राचें सूत्रांतर अ त्याची जिच्या त म्हणून त्याचा परीघ २मत आणि घर्षणगुणक ग आहे असें कल्पूं.

श

ल

मळसूत्राच्या परिघावर श शक्ति कार्य करीत आहे असें समजलों तर मळसूत्रानें तोललेलें वजन ज्या उतरणीची उंची अ आहे. आणि पाया २मत आहे म्हणजे जिच्या कोनाची स्पर्श

रेषा अ आहे अशा उतरणीवर तिच्या पायाशीं समां-

२मत

तर दिशंत कार्य करणाच्या हा शक्तीने तोळल्याप्रमाणे आहे. म्हणून क. १७२ यातील सारणीत स्प. ७ची किंमत $\frac{अ}{२मत}$ लिहून घेऊन.

$$\frac{श \quad स्प. ७ ग}{व \quad १ \pm ग स्प. ७} = \frac{\frac{अ}{२मत} ग.}{१ \pm ग \quad \frac{अ}{२मत}}{\frac{अ \pm २मत ग.}{२मत \pm ग अ.}}$$

परंतु हा शक्ति त लांबीच्या उच्चाळकाने कार्य करित आहे.

म्हणून-

$$श \times त = श \times त \therefore श = श \frac{त}{त}$$

ही किंमत वरच्या समीकरणांत लिहून.

$$\frac{श \times \frac{त}{त}}{व} = \frac{अ \pm २मत ग.}{२मत \pm ग अ.}$$

$$\therefore \frac{श}{व} \times \frac{त}{त} = \frac{अ \pm २मत ग.}{२मत \pm ग अ.}$$

(१७७) व्यावहारिक उपयोग- गति किंवा चलनदे-
तांना जरा घर्षणाचा मतिबंध होतो व यासुळे घर्षणाच्या अभावीजे
बंदी शक्ति लागेल त्याहून जास्त लागते. तरी घर्षणापासून व्यवहारांत
फार फायदा होतो व कित्येक क्रिया तर घर्षणाच्या अभावी व-
हुतेक अशक्य झाल्या असत्या. रेंकडीवर चढणे घर्षणाच्या भा-
वी अगदी अशक्य झाले असते. घर्षणासुळे जो चढणीवर पाय
ठरतो तो ठरला नसता व दम घेऊन दुसरा पाय टाकण्यास जोरक
रितां आला नसता. सपार जमिनीवर रुद्धां चालण्यास सुकिल प-
डती कारण घर्षणरहित सपाटीचा दाब तिशी लंब अशा दिशेंत

सेल म्हणून चालतांना पायांच्या दाबही त्या सपाटीशी लंब अ-
 शा दिशेंत वरोबर पडावा लागेल. परंतु ही गोष्ट व्यवहारांतस-
 र्वदां होणें अशक्य असते. म्हणून घर्षणाच्या अभावीं शरीरपु-
 ढें नेण्यास जो जोर करवा लागेल, त्याणें शरीर मागें मागेंच प-
 ढत जाईल आणि पुढें जातां येणार नाहीं. परंतु पाय आणि जमी-
 न यांच्या घर्षणामुळे पाय जमिनीवर उरून पुढें पाऊल टाकण्या-
 स जोर करितां येतो. बर्फावर किंवा तुळतुळीत अशा स्निग्ध प-
 दार्थां लावलेल्या जमिनीवर किंवा काठीवर किंवा कांचेसारख्या अ-
 गदीं साफगुळगुळीत पृष्ठभागावर चालण्याचें फार कठीण पडते.
 विलायतेन सणाच्या दिवसांत एक रेषेळ करितात. त्यांत डुकराच्या शे-
 पटीस साबू लाऊन तुळतुळीत करितात. व ती तुळतुळीत शेपटी ध-
 रून जोत्या डुकरास धांवतांना धरील त्यास कांहीं इनाम देण्या-
 चें कबूल करितात. कारण शेपटीच्या तुळतुळीतपणामुळे घर्षण
 फार कमी असतें. त्यामुळे त्यावर अत्यंत जोर केल्याशिवाय हा-
 त ठरत नाहीं. तसेंच सुवर्चित व इतर ठिकाणीं पैजांच्या दिवशीं-
 ही एक रेषेळ करितात. त्यांत एका गुळगुळीत रवाबास चरबी ला-
 वून त्याच्या टोंकास कांहीं रुपये बांधतात. आणि तो रवाब पुर-
 नात. किंवा कशास तरी उंच आडवा बांधतात. नंतर जो त्या रवा-
 बावर चढून किंवा दुसऱ्या टोंकावरून रुपये बांधलेल्या टोंकाप-
 र्यंत हातानें उककं वून चढून जाऊन बांधलेले रुपये घेईल. त्या-
 सते इनाम देतात. परंतु रवाब वराच घर्षणरहित इनामामुळे त्या-
 वर चढतांना लोक धडाधड पडतात, व हशा पिकतो. घर्षणाच्या
 अभावीं हातांत रूद्धां प्रवादा तुळतुळीत पदार्थ घट्ट धरणीं फार
 कठीण जाते. बर्फाचा तुकडा हातांत सहजीं घट्ट धरतां येत ना-
 हीं, हे याचें चांगलें उदाहरण आहे. तुळतुळीत रस्यावर गा-
 डी कधीही चालवितां व थांबवितां येणार नाहीं. भागगाडीच्या

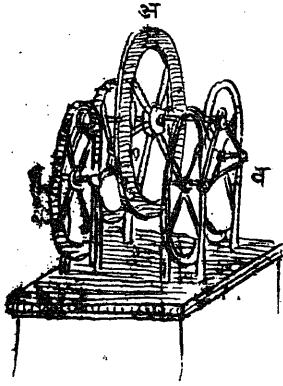
रुखांवर घर्षण पुष्कळ कमी असते. तथापि कांहीं घर्षण असतें म्हणूनच मोठी वजनं त्याच्या यंत्रास पुढें ओढितां येतात. घर्षणाच्या अभावीं मळसूत्रें, खिळे, खुंट्या वगैरे भाळून जे पदार्थांचे वेगळे वेगळे भाग जाडवां येतात ते सुळींच आले नसते. परंतु दोहों-मध्ये घर्षण असतें म्हणून हे आपल्या जागीं राहून दोहों भागांस घट्ट धरितात. लांकूड चिरण्याकरितां किंवा कोडण्याकरितां पाचर आघातांनीं आंत मारितां. परंतु आघात क्षणिक असतात म्हणून आघात बंद झाल्यावर घर्षणामुळे लांकडांनें पाचरास धरिलें नसतें; तर पाचर लांकडाच्या प्रतिबंधानें बाहेर निघालें असतें; परंतु वस्तुतः एकामागून एक टोळे बसेपर्यंत पाचर घर्षणानें लांकडांत स्थिर राहते. इतकेंच नव्हे तर मोठमोठ्या इमारती व बांध यांस दृढता व मजबुती घर्षणाच्या अभावीं अगदीं नसती, आणि त्यांचे सर्ब तुकडे तुकडे होते. इमारतीच्या बांधणींत दगड विटांचा उपयोग करितां त्यांत त्यांच्या पृष्ठभागांच्या घर्षणावर त्यांची फार मजबुती अवलंबून असते. या प्रमाणें सृष्टींत ही घर्षण अत्यंत उपयोगी शक्ति आहे. जेव्हां यंत्राचा केवळ वजन किंवा एखादा प्रतिबंध नसून धरण्यास उपयोग करावयाचा असतो, तेव्हां घर्षणाचें कार्य शक्तीबरोबर होत असल्यानें घर्षणानें यांत्रिकसार्थ प्राप्त होतो. घड्याळें व दुसरीं यंत्रें बसवितांना ही घर्षणशक्तीचा फार उपयोग होतो. कोणत्याही यंत्रास किंवा पदार्थास चलन देण्याचें असतें. त्यावेळीं मात्र घर्षण अगदीं नाहीसं नाही, परंतु बरेच कमी करावें लागतें. व त्याकरितां अनेक उपाय योजीत त्यापैकी कांहीं खालीं दिले आहेत.

(१७६.) (१) घांसणाच्या सपाट्या गुळगुळीत कराव्या परंतु हा गुळगुळीतपणा कांहीं मर्यादेच्या आंत असावा लागतो. (२) जे पदार्थ परस्परंघोर घांसणार ते निरनिराळ्या जातीचे घ्यावे. आंस तिरव्याचे असतात. आणि ते ज्यांक फिरतात ते अवग्रव पितळेचे किं-

वा लोहरबंडाचे अस्तित्वात घड्याळें आणि त्यांसारखीं दुसरीं लहान यंत्रें यांत तिरव्याचे आंस अर्कीक किंवा द्विग यांत फिरतात. (३) पदार्थाच्या घर्षण पावणाऱ्या अवयवाभयें स्निग्ध पदार्थ घालावे. मृदु अवयवांत चरबी, घट्टीस इत्यादि घालावे. आणि कठीण पृष्ठभागांस तेलासारखे द्रवपदार्थ लावावे. धातु लांकडावर फिरते तेव्हां चरबी, डांबर किंवा दुसरे दाटघीस हे पदार्थ लावावे, धातु धातुवर फिरते तेव्हां तेल घालावे. कठीण व गुळगुळीत धातुचा पृष्ठभाग असला म्हणजे फार पातळ असें तेल घ्यावे. शिसपेन्सनी ज्या दगडाच्या करितात. त्यांची पुढही घर्षण कमी करण्यास फार उपयोगी पडते. (४) पदार्थाच्या घांसणाऱ्या अवयवांचा विस्तार कमी करावा; आंसाचा जो भाग चाकांत फिरतो तो कमी ठेवावा. (५) पदार्थ जुस्ते जमिनीवरून ओढावे त्याबद्दल चाकांच्या गाडींत घालून किंवा गोल रुळांवरून ओढावे. पदार्थ सरपटत ओढीत नैला असतां जेवढा घर्षणाचा प्रतिबंध होतो, त्याहून गोल रुळ किंवा चाक गरगरां फिरत असतां लोदीत गेल्यानें फारच कमी घडतो. याचीं कारणें दोन असतात. गोल चाके किंवा रुळ जमिनीवर उभे असतां एका रेषेनें मात्र जमिनीस स्पर्श करितात. म्हणजे घांसणाऱ्या पृष्ठभागांच्या विस्तार कमी असतो. आणि गरगर फिरण्यासुद्धें कोणतेही भाग एकमेकांसन्निध फार वेळ राहत नाहीत यामुळे इतर उपायांपेक्षां या रीतीनें घर्षण फार कमी करितां येते. चाकांच्या गाड्यांवरून केवढीं वजनें थोड्या शक्तीनें नेतां येतात, हें सर्वांस माहीत आहेच. तसेच मोठें लांकूड किंवा दगड ओढावयाचा असला म्हणजे त्या रवाळीं वाटोळीं लांकूडे घालतात. तोफेच्या गाड्यांस सपाट बेंठक असत्ये तेव्हां वाटोळे दांडे किंवा गोळे त्यावाळीं घालून फिरवितात. एक ५५० डेर वजनाचा आबडघोबडें दगड रवाणीतून वर काढण्यास ३७९ शेंसची शक्ति लागली, वि-

(२८८)

न चाकाच्या गाढ्यांत घालून लांकडी फळीवरून त्यास ओढिले.
तेव्हां ३०३ शेरांची शक्ति लागली. लांकडी फळीस चरबी लावूनतु-
ळतुळीत केले तेव्हां ९१ शेरांची शक्ति ओढण्यास बरस झाली.
परंतु जेव्हां लांकडी गोल रुळांवरून दगड ओढिला तेव्हां सा-
रा १४ शेरांची शक्ति अगदी बरस झाली. (६.) ज्यांस घर्ष-
णचक्रे म्हणतात त्यांचा उपयोग करावा. आंस गोल भोंकात
न फिरता तो खालील आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें घर्षणचक्रांच्या
परिघांवर राहतो व यामुळे घर्षण
अत्यंत कमी होतें.



आकृतींत ह्या चाकाचा आं-
स व ब या घर्षणचक्रांच्या परिघां
वर आहे.

रवडी घालून साफ व समा-
ट रस्त्यावर घर्षण बरेंच कमी घड-
ते; परंतु भागगाडीच्या रुळाच्या रस्त्या-
वर तर फारच कमी घडतें. घर्षण क-

मी केल्यानें चंलनास फार उपयोग होतो. परंतु गाडी थांबविताना चा-
पासून अडथळा येतो. गाडी थांबवितेवेळीं घर्षण वाढवावें लागते.
म्हणून भागगाड्यांस मोठे मोठे ब्रेक म्हणजे प्रतिबंधक लाविले-
ले असतात. त्यांस गाडी थांबविते वेळीं चाकांवर लागू करितात. म-
संगधिदोषीं घर्षण वाढविण्याकरितां असले ब्रेक फेटणीसही अस-
तात. मोठ्या उतरणीवरून छकडे उतरतानां गरगर गति नाहीशी क-
रून घर्षण वाढविण्या करितां चाकें बांधतात.

अनेक मयोगांवरून काढलेले कांहीं घर्षणगुणक खालीं
दिले आहेत.

लांकडावर लांकूड.

(नेलाशिवाय) ०. ५.

(२८०)

लांकडावर लांकूड.	(तेल लाविल्यावर).....२
धातूवर लांकूड.	(तेलाशिवाय.)६
” ”	(तेल लाविल्यावर).....१२
धातूवर धातु.	(तेलाशिवाय)....१०
” ”	(तेल लाविल्यावर)....१२
लोखंड दगडावर.	(तेलाशिवाय)७
” ”	(तेल लाविल्यावर)....३
लांकडावर चामडे.	(तेलाशिवाय)....१६३
” ”	(पाण्यानें धिजविल्यावर)....८०
लोखंडावर लोखंड.	-----११०

उदाहरण १- एका घांटाच्या रस्त्यांत १०० फूट लांबीत ५ फूट चढ आहे. त्याचरून ६ दगाचे शोड्डे ओढण्यास कितती शक्ति लागेल? घर्षण गुणक $\frac{1}{2}$ आहे.

आगगाडीच्या व इतर रस्त्यांचे चढउतार लांबीच्या मानानें इतके लहान असतात कीं, पदार्थाच्या वजनाइतकाच बहुतेक रस्त्याच्या सपाटीचा दाब आहे, असें मानण्यास हरकत नाही. वजन वर चढवावयाचें आहे म्हणून घर्षणाचा व्यापार रथाच्या वाघूस होईल.

येथें ग = $\frac{1}{2}$, व = ६, र = ६, उंची = ५, लांबी = १०.

∴ घ = गर = $\frac{3}{2} \times ६ = ९$, धुथ = $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

या सारी प्रेरणा समतोल आहेत, म्हणून त्यांचे उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर पृथक्करण केल्यास पृथग्भूत भागांची बेरीज शून्य होईल.

$$घ + वधुथ - ग = ०$$

$$∴ श = घ + वधुथ.$$

(२१०)

$$= \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{11}{20} \text{ टन.}$$

उत्तर $\frac{11}{20} \times 20 = 11$ हट्रेड वेट.

उदाहरण २ ३० कलांच्या खरबरीत उतरणीवर १० पौंड वजन स्थिर आहे. तर घर्षणशक्ति किती व उतरणीच्या सपाटीचा प्रतिबंध किती तें काढ.

र = व को भुज आणि घ = र स्फ. थ.

$$\text{को भुज} = \text{को भु } ३० = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ स्फ. } ३० = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{र} = १० \times \frac{\sqrt{3}}{2} = ५\sqrt{3}$$

$$\text{घ} = ५\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{५\sqrt{3}}{2}$$

उदाहरणे.

(१) सपाट आगगाडीच्या रुळावर ३० टन वजनाचे डबेओढावयाचे आहेत. घर्षणाचा प्रतिबंध दर टनास ८ पौंडांचा किंवा एकंदर प्रतिबंध वजनाच्या ३ टें आहे. तर घर्षणाचा प्रतिबंध अति कमण करण्यास शक्ति किती लागेल?

उ. २४० पौंड

(२) आगगाडीच्या रुळावर १०० फूट लांबीत २ फूट चढ आहे. ५० टन वजनाची गाडी वर चढविण्यास किती शक्ति लागेल? घर्षणगुणक $\frac{1}{20}$ आहे.

उ. २६५० पौंड.

(३) १० इंच लांबीच्या देवदारी लांकडाच्या रुळावर रवडूचाच पटा तुकडा ठेविला, तर रुळाचे एक टोंक $9\frac{3}{4}$ इंच वर उचलले म्हणजे रवडू रवालीं सरून लागतो, तर रवडू व देवद्वार यांमधील घर्षणगुणक काढ?

उ. ४७०

(४) एका उच्चलकाच्या भुजा १० फूट आणि ३ फूट आहेत, आं-

(५९१)

स लोखंडी असून उच्चालकाच्या भोंकांत ओक लांकडाची चौकट
किंवा साकाटा वसविलेला आहे. आंसाच्या व्यास ६ इंच आहे. आ-
णि लोखंड व ओक यांचा घर्षणगुणक ०.६२ आहे, तर १० फूट लांबीच्या
भुजेस ३० पोंडाची शक्ति लाविल्यास केवढे वजन ती उचलू शकेल?

उ: १४.५ पोंड.

(५) जर वरच्या उदाहरणांत सांकाटाही लोखंडीच असला व
घर्षणगुणक १९ असला तर किती वजन उचलले जाईल, आणि घ-
र्षणसुळीच नसल्यास किती वजन उचलले जाईल?

उ: १८ पोंड, १०० पोंड.

(६) ६ इंच व्यासाच्या चाकाच्या परिघापासून २ आंसाचे व-
जन दांगिले असतां ते ६.५ इंच व्यासाच्या कण्यावर २७ आंसाचे व-
जन तोलून धरिते. यांच्या आंसाच्या व्यास २० इंच आहे तर घर्षणगुण-
क काढ?

उ: $\frac{1}{\sqrt{16}}$

(७) ओक लांकडाची पेटी ओक लांकडाच्या उतरणीवर स्थिर
आहे. उतरणीची उंची ३ फूट आणि लांबी १४ फूट आहे. पेटीचे वज-
न ९६.४ पोंड आहे. उतरणीवर चढविण्यास आणि रवाळी लोखंड्या-
स अनुक्रमे किती शक्ति लागेल. आणि घर्षणसुळीच नसले तर व-
र चढविण्यास किती शक्ति लागेल ते सांग. घर्षणगुणक ०.५४ आहे.

उ: { वर चढविण्यास ७९०.३८ पोंड.
रवाळी लोखंड्यास ३७७.१९ पोंड.
वर चढविण्यास २०६ पोंड.

(८) ओकच्या ३६ कलांच्या उतरणीवरून लोखंडी का-
व चढविण्यास ५० दारांची शक्ति उतरणीशी ५० चा कोन कणा-
च्या दिशेने लाविली आहे. तर केवढे वजन वर चढेल? घर्षणगुणक
०.६२ आहे.

उ. ५३ $\frac{१}{२}$ शेर.

(१९) स्वरबरीत उतरणीवर १० पोंडांचें वजन तोळून घरण्यास ३ पोंडांची शक्ति लागते आणि गुळगुळीत उतरणीवर ६० डाची शक्ति लागते. तर उतरणीचा मतिबंध आणि शक्ति या दोहोंचें वजनावर किती दाब पडतो.

$$उ. \sqrt{३ + ३} = \sqrt{७३}.$$

(१०) ३०° कलाच्या स्वरबरीत उतरणीवर केवळ घर्षणशक्तीनें एकापदार्थास रवाळीं जाऊं न देतां तोळून धरिलें आहे. तसें दाखीवकीं, पदार्थाच्या वजनापेक्षां जास्त जोराची शक्ति सत्या शिवाय पदार्थां वर चढणार नाहीं.

(११) क्षितिजपातळीशीं समांतर अशा पातळीवर एक पदार्थ आहे. घर्षणाचा मतिबंध दूर करण्यास पदार्थाच्या वजना एवढी शक्ति क्षितिजपातळीशीं समांतर दिशेंत लावावी लागते. ही पातळी जर हळू हळू वर उचलीन गेलें तर केवढा कोन झाला म्हणजे पदार्थ रवाळी सरकू लागेल?

उ. १७°

(१२) स्वरबरीत उतरणीची उंची व लांबी ३ : ५ या ममाणांत आहेत. हिजवर १५ शेरांचें वजन घर्षणशक्तीनें तोळून धरिलें आहे. तर घर्षणाचा जोर किती शेरांचा आहे तें काढ!

उ. ९ शेर.

(१३) उतरणीची उंची व लांबी ३ : ५ या ममाणांत आहेत. १० शेरांचें वजन सुस्त्या घर्षणशक्तीनें तोळून मात्र धरिलें आहे. तर असें दाखीवकीं, १२ शेरांच्या शक्तीनें त्या वजनाचा वर चढण्याचा कोन होईल.

(१४) उतरणीची सपाटी साफ व गुळगुळीत असली तर सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी ७ मणाची शक्ति २५

(२१३)

मणाच्या वजनास तोलून धरून शकते. तर तीच उतरणा रवरवरीत असून घर्षणगुणक $\frac{1}{9}$ असल्या तर ते वजन ओढण्यास त्याच दिशेने त केवढी शक्ति लागेल.

उ: १७ मणाहून जास्त.

(१५) वरच्या उदाहरणांत अत्यंत फायदेकारक अशा दिशेने शक्ति लाविल्यास किती लागेल, म्हणजे अत्यंत कमी शक्ति किती लागेल?

उ: $१५ \frac{१}{९}$ मण.

(१६) रवरवरीत फरशीवर एका साफ गुळगुळीत अशा एका घराच्या भिंतीस देऊन एका शिडी ६.०° चा कोन करण्याजोगी कलती ठेविली आहे, तर असे ताखीव की जेव्हा मनुष्य शिडीवर वदन गुरुत्वमध्य आर्ध्या शिडीच्यावर जातो तेव्हा शिडीचे वृद्धांग फरशी यांमधील घर्षणगुणक $\frac{1}{6} \sqrt{३}$ असतो.

(१७) एक मोठी लुळी जमिनीवर एका उभ्या भिंतीशी देऊन कलती ठेविलेली आहे. तर जमीन आणि भिंत यांचे घर्षणगुणक $३/४$ दिले असता लुळीच्या टोकं पासून तिच्या गुरुत्वमध्याची उंची तरे अर्ध दिली असता मयदिच्या स्थितीन क्षितिजपातळीशी शिडी किती कलती राहिल.

उ. स्प. ७ $\frac{\text{अ-गगद}}{\text{(अ-ब) ग.}}$

(१८) चाकाची त्रिज्या २० इंच आहे; कण्याची त्रिज्या ६ इंच आहे आणि चाक व कणा यांचे वजन ७० पौंड आहे. चाक व कणा ज्या आंसावर फिरतात त्या आंसाची त्रिज्या १ इंच आहे. घर्षणगुणक $\frac{1}{१०}$ आहे, तर १०० पौंडांचे वजन उचलण्यास केवढी शक्ति लागेल, (कोन फार लहान असल्या म्हणजे स्पष्टी रेषेबरोबरच भुजिज्या घेण्यास हरकत नाही)

(२९४)

उ. ३१ $\frac{१}{१११}$ पौंड.

(१९) मळसूत्राचे सूत्रांतर असें आहे कीं, कांहीं शक्ति लाविल्याशिवाय केवळ घर्षणानें वजन तोललें जातें. तर व वजन उचलण्यास अगदीं कमी अशी किती शक्ति लागेल.

उ. श = $\frac{२ ग व}{१-ग}$

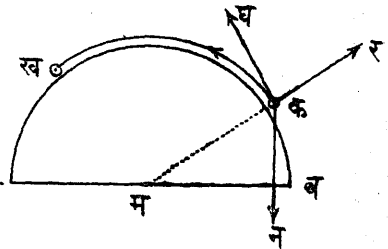
(२०) बुकें दावण्याच्या मळसूत्राच्या चापणीचा यांत्रिकस्वार्थ २५० आहे आणि नुसत्या मळसूत्राच्या यांत्रिकस्वार्थ २० आहे; तर २५० पौंडाचा प्रतिबंध अतिक्रमण करण्यास केवढी शक्ति लावावी लागेल? घर्षणगुणक $\frac{१}{३}$ आहे.

उ. १२ $\frac{२}{१}$ पौंड.

(२१) उतरणीचा कल इतका आहे कीं, तिजवर शक्ति लाविल्या शिवाय केवळ घर्षणानें विवक्षित वजन तोललें जातें; तर असें सिद्ध कर कीं, त्या उतरणीवर वजन चढविण्यास अगदीं कमी शक्ति साफ गुळगुळीत अशा उतरणीवर तेंच वजन तोलून धरण्यास जी शक्ति लागेल तिच्या दुप्पट असेल.

(२२) एका रबरबरीत अशा अर्ध वर्तुळाच्या परिघावर क आणि रव हीं दोन वजनें असून त्यास एका दोरीनें जोडलें आहे. क व रव यांची स्थळें वर्तुळाच्या मध्य बिंदूशीं सांधिल्यास काटकोन होतो. तर समतोलत्वाच्या स्थितींत अगदीं रवालीं असें क वजन कोणत्या ठिकाणीं असेल?

अ र व क व हे अर्ध-वर्तुळ आहे. म मध्य आहे. इच्छित समतोलत्वाच्या स्थितींत क म सांधिल्यास क-



मद्व कोन ए होता असें कल्पूं.

क वजन खाळीं सांगितल्या चार मेरणांनीं समतोल राहिलें आहे.

(१) क वजन कन यादिक रेपेंत कार्य करील.

(२ व ३) घ घर्षण आणि त दौरीचा ताण कघ या स्पर्शी रेपेंत कार्य करितील.

(४) र प्रतिबंध स्पर्शी रेपेवर लंब अशा कर रेपेंत कार्य करील.

या मेरणांचीं स्पर्शी रेपेंत व तिशीं लंब अशा दिशेंत पृथक्करणें करून आणि घ = गर घेऊन.

$$क. भु. ए - र = ० \quad \dots \dots \dots (१)$$

$$क. को. भु. ए - गर - त = ० \dots (२)$$

(१) यांतिल र ची किंमत (२) यांत लिहून.

$$क. को. भु. ए - गक. भु. ए - त = ०$$

याच प्रमाणें र व च्या समतोलत्वाच्या स्थितींतिल दोन समीकरणां पासून पुढील समीकरण घेईल.

$$र व. भु. ए + गर व. को. भु. ए - त = ०$$

या दोहोंची वजाबाकी करून व कोंस काढून.

$$(क - गर व) को. भु. ए - (र व + गक) भु. ए = ०$$

$$\therefore भु. ए (र व + गक) = को. भु. ए (क - गर व).$$

$$\therefore स्प. ए = \frac{क - गर व}{र व + गक}$$

यावरून क चे स्थान समजतें.

समाप्त.

या पुस्तकांत ज्या इंग्रजी शब्दांस त्यांचे अर्थसूचक असे
मराठीकिंवा संस्कृत शब्द दिले आहेत त्यांचा कोश.

पृ. मराठी.

- २५५ अनंतमळसूत्र.
१०३ आंसास खिळलेलें चाक
किंवा चाक व कणा.
१५५ उच्चालक.
१५७ उच्चालक सरळ.
१५७ उच्चालक वाकडा.
१५७ उच्चालक शक्ति.
१५७ उच्चालकाच्या भुजा.
१७६ उच्चालकांनी सांगड.
१५७ उच्चाल्यपदार्थ.

१९९ कटक चाकें.
२०७ कप्पी.
२०७ कप्पी अचल.

२०७ कप्पी चल.
२०७ कप्पीना आंस.

२०७ कप्पीची चौकट.
२०७ कप्पीवरील खांच.
२१० कप्पींनी पहिली रचना.
२११—दुसरी रचना.

२११—तिसरी रचना.
२३ कार्यमार्ग.
८ कार्यदर्शकरेषा.

१९९ किरिटचाकें
३ त्रिजिजापातळी.
—शीरामांतर.
२ गतिशास्त्र.
४९ घटकप्रेरण.
२६२ घर्षण.
२६२ घर्षणगुणक.

इंग्रजी.

- Endless Screw.
Wheel & Axle.

Lever.
Straight Lever.
Bent Lever.
Power applied to a Lever.
Arms of a Lever.
Compound Lever.
Weight or body sustain-
ed by a Lever.
Spur Wheels.
Pulley.
Fixed or immoveable
Pulley.
Moveable Pulley.
Pivot or axis of the
Pulley.
Block of the Pulley.
Groove of the Pulley.
First system of Pulleys.
Second system of
Pulleys.
Third system of Pulleys.
Way of Action.
Line representing the
action of a Force.
Crown Wheels.
Horizontal Plane.
Horizontal.
Dynamics.
Component Forces.
Friction.
Coefficient of Friction.

२६८	घर्षणमयीदा.	Limiting Position of equilibrium.
२६८	चलनप्रांताकिंवाचलनकल्प.	Bordering on Motion.
१९३	चाकें व कणेशींसांगड	Combination of Wheels and Axles.
१८६	डिन्न.	Section.
१५६	टेंकू.	Fulcrum.
१६५	टेंकूवरील दाब.	Pressure on the Fulcrum.
१७३	डेनिश तराजू.	Danish Steel Yard.
१६६	तराजू.	Balance.
१६७	तराजू खरा.	True Balance.
१६७	खोटा.	False Balance.
१६७	सूक्ष्म.	Sensible Balance.
१६७	स्थायी.	Stable Balance.
२००	तिर्यक् दांत्यांचीं चाकें.	Bevelled Wheels.
१९८	दांत्ये असलेलीं चाकें.	Toothed Wheels.
	४ दाब.	Pressure.
३११३३	दिकरेषा—लंबरेषा.	Vertical Line.
२३२	दुस्रो उतरण.	Double Inclined Plane.
	६ दृढपदार्थ.	Rigid Body.
१७५	पत्रें वजन करण्याचा तराजू.	Letter Balance.
	फलितप्रेरणा.	Resultant.
	६ परिणामी प्रेरणा.	Resultant Couple.
११४	परिणामी युग्म.	Wedge.
२३७	पाचर.	Resistance.
२६२	प्रतिबंध.	Force.
	१ प्रेरणा.	Triangle of Forces.
	४३ प्रेरणा त्रिकोण.	Resolution of Forces.
	२ प्रेरणापृथक्पृथक्.	Polygon of Forces.
	५८ प्रेरणा बहुकोण.	Couple.
१०६	प्रेरणायुग्म अथवा जुळें.	Axis of a Couple.
१०७	प्रेरणायुग्माचा आंस.	Arm of a Couple.
१०७	प्रेरणायुग्माची मुजा.	Superposition of Forces.
११	प्रेरणारोहण.	Composition of Forces.
	२ प्रेरणैकीकरण.	Effect of a Force in a given direction.
५४	प्रेरणेचा दिलेल्या दिशेंत परिणाम.	Resolved part of a Force in a given direction.
५४	प्रेरणेचा विवक्षितदिशेंतील पृथग्भूतभाग.	Action of a Force.
	३ प्रेरणेचे कार्य.	

- १०४ प्रेरणेने पातळीसंबंधी
आमकत्व.
०६ प्रेरणेने आमकत्व.
०६ प्रेरणेने विवक्षित बि-
ंदूसंबंधी आमकत्व.
० प्रेरणेने संचरत्व.
- १०२ प्रेरणेने सरळ रेषेसंबंधी
आमकत्व.
०६ आमकत्व.
२४१ मळसूत्र.
२४२ मळसूत्राचा कळ किंवा कोन.
२४२ मळसूत्राचा वेढा.
२४२ मळसूत्राचे सर्पकृति मूल
किंवा मळसूत्राची धार.
- १५५ यंत्रिक शक्ति.
१७२ वजनकरण्याची सावी दांडी
किंवा रोमन तराज.
१७१ वजन करण्याच्या दांड्या.
२६६ विसाऱ्याना कोन किंवा
घर्षणकोन.
१ समतोल प्रेरणा.
११२ स्थितिशास्त्र.
१३० समरूप किंवा सारख्या दांड्यांच्या.
७० समतारप्रेरणा.
७९ समतारप्रेरणांमध्य.
- १२० समतोलत्याच्या आवरण-
कमोष्टा.
२६० समतोलत्याच्या सामा
१३० समरूपद्रव्यमय.
१५५ सार्थपत्रे.
१९० संयुक्तनाक व कणा.
२५२ संयुक्तमळसूत्र.
१९३ सततवर्ति पत्रे.
- Moment of a Force with
respect to a Plane.
Moment of a Force.
Moment of a Force about
a given Point.
Transmissibility of a
Force.
Moment of a Force with
respect to a Line.
Moment.
Screw.
Angle of a Screw.
Revolution of a thread.
Thread of a Screw.
- Mechanical Powers.
Roman Steelyard.
- Steelyards.
Angle of Friction.
- Forces in Equilibrium.
Statics.
Of Uniform Density.
Parallel Forces.
Centre of Parallel
Forces.
Conditions of Equili-
brium.
Limits of Equilibrium.
Of uniform material.
Simple Machines.
Compound Wheel and
Axle.
Compound Screw.
Endless Straps.

List of Works Consulted.

- Goodwin's Statics.
 Todhunter's Mechanics for Beginners.
 Lardner's Mechanics.
 Newth's Natural Philosophy.
 Parkinson's Mechanics
 Minchin's Statics.
 Baker's Statics and Dynamics.
 Galbraith and Haughton's Manual of Mechanics.
 Greave's Statics.
 Rawlinson's Statics.
 Todhunter's Analytical Statics.
 Venkatrao's Natural Science.
 Naegamwalla's Mechanics.
 Newth's Mechanics.
 Tomlinson's Mechanics.
 Baker's Mechanism.
 फडकेकरत यंत्रशास्त्राची मूलतत्वे.
-

शुद्धिपत्र.

पृष्ठ	श्लोक	अशुद्ध	याच्या जागीं	शुद्ध.
४	४	केवढा.		केवढ्या.
११	४	उ ठिकाणीं.		अ ठिकाणीं.
१६,	८	दिशानीं.		दिशांनीं.
१७	१	म्हणजे.		तेव्हां.
२०	१४	अ,प.		अप.
२२	२	अ, ग		अग.
२२	११	अ,म आणि अ,न		अम आणि अन
२४	१	अब अक		अब, अक.
२५,	१०	अ, ज		अज.
३०	१	परंतु अः इ रेखा		परंतु अइ रेखा.
३२	२१	करव मेरणा		क, रव मेरणा.
३३	७	गड/ अइ		गड/ अउ.
३३	१८	उ अइ असेल		उअई असेल
३७	४	कोनास.		कोंनांस.
३८	६	तीन मेरणा		तीन समान मेरणा.
३८	८	(२२)		(२१)
३९	१५	-स्वकोमु(७)-		-स्वकोमु७
४३	८	आणि क, अ		आणि कअ.
४९	१०	जर		जर
४३		या पृष्ठांतील त्रिकोणाच्या कोनाच्या नव्या जागीं व अक्षर पाहिजे.		
४४	२	पफ, बयाही,		प, फ, ब याही,
४७	१	आणि बक,		आणि बव,

(२)

पृष्ठ.	श्लोक.	अशुद्ध.	शुद्ध.
४७	२३	म्हणून बकड रेषा	म्हणून कड रेषा
४९	९	कार्यदशक मेरणा.	कार्यदशक रेषा.
४९	१४	(क)	(क० ५०)
५०	२३	अंशाचे.	अशांचे.
५७	२४	याशीं	यांशीं
५५	९	मेरणेच्या पृथग्भूत.	मेरणांच्या पृथग्भूत.
५७	१२	अत लांबी	अतची लांबी.
५८	२१	बहुकोणाच्या बाजू.	बहुकोणाकृतीच्या बाजू.
५९	३	मेरणेचे परिणाम.	मेरणेचे परिमाण.
५९	७	तर क.	तर क. ३७
५९	८	कक, भुअ	क१ भुअ
६०	४	स्प. रे. (भु. ब)	स्प. रे. ब.
६१	१५	समांतर चौकोन.	समांतरभुज चौकोन.
६५	४	तीन व डय.	तीन व डय.
७०	१७	अनेक बिंदूवर	अनेक बिंदूवर.
७१	७	पदार्थावर अ ब	पदार्थावर अ, ब.
७१	१८	क र व आणि गड.	क, र व गड
७२		आकृतीत र व मेरणा कार्य करिते त्या ठिकाणी ब अक्षर घा- लावे.	
७२	२६	क मेरणा गड दिशेने.	क मेरणा गड दिशेने.
७२	२६	र व, गड दिशेने	र व, गड दिशेने.
७५	२६	अंतरं अ ब	अंतर अ, ब.
७७	२१	कमः र व मः प२	कमः र व मः प२ः
७९	६.१७	ठिकाणी असतील आणि	ठिकाणी असतील तर.
७९	२२	प२ आणि प२	प, आणि प२

पृष्ठ.	ओळ.	अक्षर.	संज्ञ.
७९		आकृतीतील अड वादवृत्त	टोंकाशीं भ अक्षर घालावें.
८०		अफ	भ
८१	८	प, ही किंमत.	—प, ही किंमत
८८	१	उलट होईल.	उलट भमण होईल.
८८	१९	ड दांड्यास प	ड दांड्यास २प
९६	५	२बउन = □ उछ	२△ बउन = □ उछ.
९६	६	□ उइ + □ उछ.	□ उइ — □ उछ.
९७	१४१५	दोहों मेरणांचा आहे.	दोहों मेरणांच्या बाहेर आहे.
९७	१६	मेरणांच्या दिशांतून.	मेरणांच्या दिशांवर.
९८	१	अक स्थळीं	अ, क स्थळीं
९८	१८	क × ब अरब × व बक	क × ब अ + रब × बक
९९	२४	विवक्षित बिंदुपासून.	विवक्षित ब बिंदुपासून.
१०७	१२	समतोल देवू झाकणार.	समतोल ठेवू झाकणार
१०९	२१३	व आहे त्या ठिकाणीं	सुसता ब समजावा.
१०९		आकृतीत उजवीकडच्या स्या लच्या अक लंबरेषेस	अक लंबरेषा समजावी.
११०	६	कक आणि वरव	अक आणि वरव
११०	२१	आणि रव रव	आणि रव, रव
१११		आकृतीत नरव न्या ठिकाणीं	वरव पाहिजे.
११२	१	कक आणि वरव	अक आणि वरव
११२	८	सुजे एवढीच घेतली.	सुजे एवढीच घेतां र जशी घेतली.
११२		आकृतीत १ स्या उभ्या रेषेवर क, रव, अरव, २ री वर व	
		क २ री वर ग अंगे अशी अक्षरे घालावीं.	
११३	१६	म्हणून बाकी अंगे	म्हणून बाकी अंगे.

पृष्ठ	श्लोक	अक्षरद्वय	शब्द.
११४	१४	तें त्याचें	तें त्यांचें.
११४	१५	युग्माच्या	युग्मांच्या.
११४	१८	भ्रामकत्वाची	भ्रामकत्वांची.
११४	२१	ठेवा त्याचा आंस.	ठेवाकीं, त्याची भुजा.
११५	१७	भ्रामकत्वांची	भ्रामकत्वाची.
११५	२४	युग्मांच्या मेरणाशीं	युग्मांच्या मेरणांशीं
१२०	२५	त्यापासून नथ	त्यापासून नथ
१२२	२५	तर त्या मेरणा	तर त्या मेरणां.
१२३	५-८	“ आणि नक्षपासून	काढ ” पर्यंत नको.
१२५		उजवीकडच्या आकृतींत करव	मेरणा मिळतात तेथें न घाला.
१२८	१५	या मध्यावर	यामध्यावर.
१२९	१३	कर्णांचे	कर्णांचे
१३७	११	गग स्थळीं.	ग स्थळीं.
१३८	२	दोन बिंदुंमधील	दोन बिंदूंमधील.
१३८	३	अशी द्रव्यरेषा	अशी द्रव्यमयरेषा.
१३८	८	ही रेषा समरूप द्रव्यमयरेषा.	ही समरूप द्रव्यमय रेषा.
१३८	१८	हा समांतर चौकोन	हा समांतरभुज चौकोन.
१३८	२३	अड, इफ आणि कडरेषास.	अड, इफ आणि बकरेषांस.
१३८	२३	अई	अ, ई
१३९	२३	अईस फग मिळत	अईस फग मिळते.
१३९		या पृष्ठावरील आकृतींत कगस अड मिळते तेथे न घालवें.	
१४२	२६	४ : ५ : ६ :	४ : ५ : ६ ::
१४३	१	कइब : कइअ :: अइब, कइब : कइअ : अइब.	
१४३	१९	ड आणि फ यावजनाचा	ड आणि फ यावजनाचा.
१४४		आकृतींत डक रेषेच्या मध्यभागीं ड	च्या जागीं ह घालावा.

(५)

पृष्ठ	श्लोक	असुद्ध.	सुद्ध.
१४७.	१	क्ष=गइ $\frac{ह्रस्व}{३} \times$	क्ष= गइ= $\frac{ह्रस्व}{३} \times$
१४६.	१७.	<u>उर्छ</u> डइ	<u>डर्छ</u> डइ
१४६.	१७	उघषम उघर्छ	डघषम, डघर्छ
१४६.	१९	<u>उर्म</u> उफ	<u>डुर्म</u> डफ
१५०	८	गवस बस्थळीं	गवस बस्थळीं.
१५०	१७.	गव रेषास	गव रेषा स
१५१		डावीकडच्या आकृतींत सबच्या मध्येंग च्या जागीं ग,ब च्या जागीं अ; आणिग पासून जी दिक् रेषा जावेति- च्या शेवटास ब अशीं अक्षरें घाला.	
१५१		उजवीकडच्या आकृतींत डावीकडच्याग च्या जागीं ग, ब च्या जागीं अ आणिगपासूनच्या दिक् रेषेच्या शेव- टास ब अशीं अक्षरें घाला.	
१५१	१०	पदाथाच	पदाथचिं.
१५१	१७	तरग बिंदुस वून	तरग बिंदुस वून.
१५१	१६.	गुरुत्व आधारबिंदूच्या.	गुरुत्वमध्य आधारबिंदूच्या.
१५२	२	गअ आणि गस.	गक आणि गस.
१५२	३	परंतु गअ.	परंतु गक.
१५८	५.	दिशांचे	दिशांचे.
१६०	८	वर्णाचा	वर्णाचा
१६२	१०	नेह्यां उच्चालक समतेळ असते हे काढून टाक.	
१६२	१३	याची परिणाम-	याची परिणामी.
१६२	१९	हेअ आणि नब यांवर	हेअन आणि नब यांवर.
१६७	१६.	तराजू स्थायी व्हावा	तराजू स्थायी अभावा.

पृष्ठ	श्लोक	अशुद्ध	शुद्ध.
१६७	२२	ट हा तिचा टेंकू.	ट हा तिचा टेंकू.
१६८	१७	ट सभोवतालच्या वजनाचा.	ट सभोवतालच्या वजनांचा.
१७४	१४	१/२, बगट्ट, बगड्ड्यादि.	१/२ बग, ट्ट बग इत्यादि.
१७६.	१५	त्याचे टेंकू ट ठ	त्याचे टेंकू ट, ठ
१७६.	१९	तसेंच क जोडाच्या	तसेंच प जोडाच्या
१८६.	५.	यांपैकी एका उच्चालकावर कार्य	एका उच्चालकावर जसें कार्य.
१९१	१४	संयुक्त चालक व कणा.	संयुक्त चाक व कणा.
१९५.	७	क, रव	क, रव.
१९७	२	त्यावर या मात्र.	त्यावरचा मात्र.
१९८	५.	पृष्ठभागामध्यें	पृष्ठभागांमध्यें.
२००		यांतील १३१ कलमाच्या आकृतींत म न सांध. आणि म म आणि न न सांध. तसेंच म न सांध	
२०८	६.	पडफव	पडफव.
२०९		डावी कडच्या आकृतींत प प्रेरणा लाविलेली दोरी क प्पीस स्पर्शी करिते तेथें प च्या जागीं फ घाला.	
२१२	५.	या ममाणें नच्या	या ममाणें न च्या
२१६.	२१	दा खालच्या.	अगदीं खालच्या.
२१८	५.	+ व (२ ^{म्} २-	+ व (२ ^{म्} २)-
२१८	१७	यांत वजन एक दोरीच्या.	यांत वजनास एक दोरीच्या.
२३०	६.	अब सपाटीशीं ठं	अब सपाटीशीं घं
२३०		घावरील वरच्या आकृतींत हु पासून निघालेल्या दिक् रेषेच्या दोकापाशीं व घाला.	
२३१	१२	$\frac{\text{धुठ}}{\text{कोधुठ}}$ स्पर्शी.	$\frac{\text{धुठ}}{\text{कोधुठ}} =$ स्पर्शी.
२३२		यांतील आकृतीच्या अक च्या मध्ये व च्या जागीं व घाला.	

पृष्ठ	श्लोक.	असकृद.	सकृद.
२३७	११	मध्याशील	मध्याशीलं.
		अग	कग
२४३	२	गक	अग
"	"	अग = कग भुञ्ज	कग = अग भुञ्ज.
२४६	९	परिघ सूत्रान्तर	परिघः सूत्रान्तर.
२४७	१०	खालच्या बाजूच्या	खालच्या बाजूस.
२४९	२	(क पहा)	(कः १५४ पहा.)
२४९	१४	क. मसाणें	कः १५४ मसाणें.
२५२	७	पाकळीतील.	पाकळीतील.
२५४	२	फळाबरोबर.	फळाबरोबर
२६६		यांतील आकृतीच्या अक्षर कलत्या रेषेच्या बाजूच्या जागी	
		घ घाला.	
२७२	१६.	<u>स्पर्शरिच</u>	<u>स्पर्शः</u>
		१ + २ स्पर्श	१ + २ स्पर्शः.
२७६	९	घर्षणयुक्त उच्चारक	घर्षणयुक्त चाक
२७६	१५	समान भुजाच्या	समान भुजांचा.
२७७	१७	त(व + वं). शत +	त(व + वं) — शतत्र
२७९	१	<u>सुध + गको भुञ्ज</u>	<u>सुधक गको भुञ्जः</u>
		को भुञ्जक ग भुञ्ज	को भुञ्जक गः भुञ्ज
२८०	१	स्पर्श ग	स्पर्श = ग.
२८१	१२	श = व भुः श.	श = व भुः प्र.
२८२	३	श _१ + श _२ + श _३ + श _n शत	त(श _१ + श _२ + श _n) = शत.
२८३	६.	<u>अ</u>	<u>अ</u>
		२ मत	२ मत

(८)

पृष्ठ	श्लोक	अक्षरछ.	शुद्ध.
२०३	८	$\frac{\text{श त}}{\text{व त}}, \frac{\frac{\text{अ}}{\text{२मत}} \text{ न ग}}{\frac{\text{अ}}{\text{१±} \times \text{२मत.}}}$	$\frac{\text{श त}}{\text{व त}} \times \frac{\frac{\text{अ}}{\text{२मत}} \text{ न ग}}{\frac{\text{अ}}{\text{१±}} \text{ २मत.}}$
२०३	९	त=त	त=त
२०३	१०	श शक्तिं	श शक्ति.
२०३	१७	पाया २मत	पाया २मत
२०३	१८	$\frac{\text{अ}}{\text{२मत.}}$	$\frac{\text{अ}}{\text{२मत.}}$
२०४	४	$\frac{\text{श}}{\text{व}}$	$\frac{\text{श}}{\text{व}}$
२०४	४	$\frac{\frac{\text{अ}}{\text{२मत}} \text{ न ग}}{\frac{\text{अ}}{\text{१± ग}} \text{ २मत.}} = \frac{\text{अ न २मत ग}}{\text{२मत ± ग अ}}$	$\frac{\frac{\text{अ}}{\text{२मत}} \text{ न ग}}{\frac{\text{अ}}{\text{१± ग}} \text{ २मत.}} = \frac{\text{अ न २मत ग}}{\text{२मत ± ग अ}}$
२०४	७	$\text{श} = \text{श} \times \frac{\text{त}}{\text{त}}$	$\text{श} = \text{श} \times \frac{\text{त}}{\text{त}}$
२०४	१२	जग घर्षणाच्चा.	घर्षणाच्चा.
२०४	१८	मुळील	मुष्कील.
२०५	६	जमिनीवर उरून	जमिनीवर उरून.
२०६	२२	योजीत.	योजितान.
२०९	६/७	०७, ०३	०७, ०३